1968 年東大文 $\boxed{4}$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0),\ g(x)=px^2+qx+r$ とする。

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=(ax^3+bx^2+cx+d)(px^2+qx+r)\\&=apx^5+aqx^4+arx^3+bpx^4+bqx^3+brx^2+cpx^3+cqx^2+crx+dpx^2+dqx+dr\\&=apx^5+(aq+bp)x^4+(ar+bq+cp)x^3+(br+cq+dp)x^2+(cr+dq)x+dr\end{aligned}$$

$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$ を求める。奇関数部分は 0 になるから、1) より

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx&=\int_{-1}^{1}\left\{(aq+bp)x^4+(br+cq+dp)x^2+dr\right\}dx=2\int_{0}^{1}\left\{(aq+bp)x^4+(br+cq+dp)x^2+dr\right\}dx\\&=2\left[\frac{aq+bp}{5}x^5+\frac{br+cq+dp}{3}x^3+drx\right]_0^1=2\left(\frac{aq+bp}{5}+\frac{br+cq+dp}{3}+dr\right)=0\end{aligned}$$

$$3(aq+bp)+5(br+cq+dp)+15dr=0\quad \therefore (3b+5d)p+(3a+5c)q+5(b+3d)r=0\ \text{——①}$$

①が任意の p,q,r について成立するので、

$$3b+5d=0,\ 3a+5c=0,\ b+3d=0\quad \therefore b=d=0,\ c=-\frac{3}{5}a$$

したがって、$a=5A$ として、$f(x)=A(5x^3-3x)$ とおける。2) より

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=A^2\int_{-1}^{1}(25x^6-30x^4+9x^2)dx=2A^2\left[\frac{25}{7}x^7-6x^5+3x^3\right]_0^1=2A^2\left(\frac{25}{7}-3\right)=\frac{8}{7}A^2=1$$

$$A^2=\frac{7}{8}\quad \therefore A=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$$

3) より、$f(1)>0$ であるから　$f(1)=2A>0\quad \therefore A>0$

したがって、$\therefore f(x)=\dfrac{\sqrt{14}}{4}(5x^3-3x)$ ……(答)