1968年東大文 $\boxed{5}$

$A(a,\ b)$ とする。直線 $y=2x-p$ に関する、A の対称点を、$B(s,\ t)$ とすると

線分 AB の傾きは、$-\dfrac{1}{2}$ であるから　$\dfrac{t-b}{s-a}=-\dfrac{1}{2}$　$2t-2b=a-s$　$s+2t=a+2b$ ——①

線分 AB の中点は、$y=2x-p$ 上にあるから　$\dfrac{t+b}{2}=2\cdot\dfrac{s+a}{2}-p$　$2s-t=-2a+b+2p$ ——②

①、②より　$s=-\dfrac{3}{5}a+\dfrac{4}{5}b+\dfrac{4}{5}p,\ t=\dfrac{4}{5}a+\dfrac{3}{5}b-\dfrac{2}{5}p$

直線 $2y=-x+q$ に関する、A の対称点を、$C(u,\ v)$ とすると

線分 AC の傾きは、2であるから　$\dfrac{v-b}{u-a}=2$　$v-b=2u-2a$　$2u-v=2a-b$ ——③

線分 AC の中点は、$2y=-x+q$ 上にあるから　$2\cdot\dfrac{v+b}{2}=-\dfrac{u+a}{2}+q$　$u+2v=-a-2b+2q$ ——④

③、④より　$u=\dfrac{3}{5}a-\dfrac{4}{5}b+\dfrac{2}{5}q,\ v=-\dfrac{4}{5}a-\dfrac{3}{5}b+\dfrac{4}{5}q$

B を原点中心に正の方向に $90°$ 回転した点が、C に一致するから　$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -t \\ s \end{pmatrix}$

$u=-t$ より　$\dfrac{3}{5}a-\dfrac{4}{5}b+\dfrac{2}{5}q=-\dfrac{4}{5}a-\dfrac{3}{5}b+\dfrac{2}{5}p$　$3a-4b+2q=-4a-3b+2p$　$7a-b=2p-2q$ ——⑤

$v=s$ より　$-\dfrac{4}{5}a-\dfrac{3}{5}b+\dfrac{4}{5}q=-\dfrac{3}{5}a+\dfrac{4}{5}b+\dfrac{4}{5}p$　$-4a-3b+4q=-3a+4b+4p$　$a+7b=-4p+4q$ ——⑥

⑤、⑥より　$\therefore a=\dfrac{1}{5}p-\dfrac{1}{5}q,\ b=-\dfrac{3}{5}p+\dfrac{3}{5}q$　……(答)