1968 年東大理 $\boxed{1}$

$0 \leqq x \leqq 5$ において、$x^2-5x=x(x-5) \leqq 0$ となる。

$0 \leqq x \leqq 5$ において、$0 \leqq \sin\left(\dfrac{\pi x}{5}\right) \leqq 1$ である。$g(t)=\dfrac{\pi}{5}t-\dfrac{3}{5}t^2=\dfrac{3}{5}t\left(\dfrac{\pi}{3}-t\right)$ とすると、$\dfrac{\pi}{3}>\dfrac{3}{3}=1$ であるから、

$0 \leqq t \leqq 1$ において $g(t) \geqq 0$、すなわち、$0 \leqq x \leqq 5$ において、$\dfrac{\pi}{5}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)-\dfrac{3}{5}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{5}\right) \geqq 0$ である。

$0 \leqq x \leqq 5,\ 0 \leqq y < \dfrac{\pi}{5}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)-\dfrac{3}{5}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)$ の部分の面積は

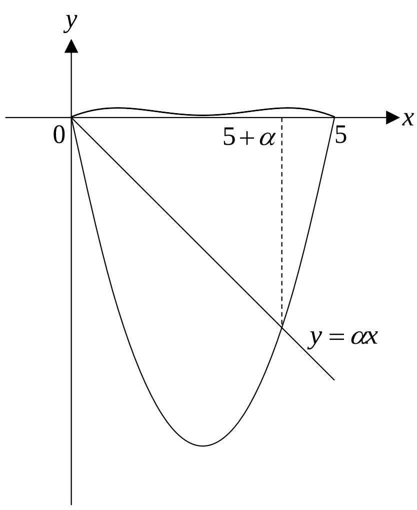
$$\int_0^5 \left\{\frac{\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)-\frac{3}{5}\sin^2\left(\frac{\pi x}{5}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^5 \left\{\frac{\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)-\frac{3}{10}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi x}{5}\right)\right)\right\}dx=\int_0^5 \left\{\frac{\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)+\frac{3}{10}\cos\left(\frac{2\pi x}{5}\right)-\frac{3}{10}\right\}dx$$

$$=\left[-\cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)+\frac{3}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{5}\right)-\frac{3}{10}x\right]_0^5=1+1-\frac{3}{10}\cdot 5=\frac{1}{2}$$

$0 \leqq x \leqq 5,\ x^2-5x<y \leqq 0$ の部分の面積は　$\displaystyle\int_0^5(-x^2+5x)dx=-\int_0^5 x(x-5)dx=\frac{5^3}{6}=\frac{125}{6}$

$0 \leqq x \leqq 5,\ x^2-5x<y<\dfrac{\pi}{5}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)-\dfrac{3}{5}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)$ の部分の面積は　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{125}{6}=\dfrac{64}{3}$



この領域の面積が、$y=\alpha x$ によって二等分されるとき、$\alpha<0$ であり、

$y=x^2-5x$ と $y=\alpha x$ によって囲まれた部分の面積が、$\dfrac{32}{3}$ であればよい。

$x^2-5x=\alpha x$ とすると　$x^2-(5+\alpha)x=x\{x-(5+\alpha)\}=0$

$y=x^2-5x$ と $y=\alpha x$ によって囲まれた部分の面積は

$$-\int_0^5 x\{x-(5+\alpha)\}dx=\frac{(5+\alpha)^3}{6}=\frac{32}{3}\quad (5+\alpha)^3=64\quad 5+\alpha=4\quad \therefore \alpha=-1$$

したがって　$\alpha=-1$　……(答)