1968 年東大理 $\boxed{5}$

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ とする。

1）より、任意の実数 $x$ について、 $P(-x)=-P(x)$ が成立するから

$P(x)+P(-x)=ax^3+bx^2+cx+d-ax^3+bx^2-cx+d=2bx^2+2d=0 \quad bx^2+d=0$

これが任意の実数 $x$ について成立するには　$\therefore b=d=0$

$P(x)=ax^3+cx$ であるから　$P'(x)=3ax^2+c=3a\left(x^2+\dfrac{c}{3a}\right)$

3）より、 $P'(x)$ の符号は変化しないから　$\dfrac{c}{3a}\geqq 0 \quad \therefore ac\geqq 0$

$c=0$ のとき、 $P(x)=ax^3=0$ は 3 重根を持つが、2）より不適。したがって、 $c\neq 0$ であるから　$\therefore ac>0$

$a,\ c$ の符号は等しい。 $P(1)=a+c$ であり、5）より $0<a+c<6$ であるから　$\therefore a>0,\ c>0$

考えられる $(a,\ c)$ の組は　$(a,\ c)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$

4）より、 $P\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{8}+\dfrac{c}{2}=\dfrac{a+4c}{8}$ は整数であり、 $a+4c$ は 8 の倍数である。

条件を満たす $(a,\ c)$ の組は、 $(a,\ c)=(4,\ 1)$ のみであるから　$\therefore P(x)=4x^3+x$ ……（答）