1968年東大理 $\boxed{6}$

（i）

$f(x)=(1+x)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{\alpha}{2}x\right)$ とすると、 $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\dfrac{\alpha}{2}=\alpha\left\{\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{1-\alpha}-\dfrac{1}{2}\right\}$

$0<1-\alpha<1$ より、 $f'(x)$ は $x=1$ のとき最小であり、 $f'(x)\geqq\alpha\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-\alpha}-\dfrac{1}{2}\right\}>0$

したがって、$0\leqq x\leqq 1$ において $f'(x)>0$ で、 $f(x)$ は単調増加。

$f(0)=0$ より、$0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)\geqq 0$　　$\therefore 1+\dfrac{\alpha}{2}x\leqq(1+x)^{\alpha}$　（証明終）

（ii）

$1000<2^{10}<1025=10^3\left(1+\dfrac{1}{40}\right)$　（i）で示した式において $x=1,\alpha=\dfrac{1}{20}$ とすると

$1+\dfrac{1}{40}<2^{\frac{1}{20}}$　　$\therefore 10^3<2^{10}<2^{\frac{1}{20}}\cdot 10^3$　各辺を20乗すると、$\therefore 1\times 10^{60}<2^{200}<2\times 10^{60}$

したがって、 2^{200} は61桁で、最上位の数は1。　……(答)

（iii）

（ii）より $1\times 10^{60}<2^{200}<2\times 10^{60}$ で、各辺の常用対数をとると　$60<200\log_{10}2<\log_{10}2+60$

左側の不等式より　$\log_{10}2>\dfrac{60}{200}=\dfrac{3}{10}=0.3$

右側の不等式より　$199\log_{10}2<60$　$\log_{10}2<\dfrac{60}{199}=0.30150\cdots$

したがって、$0.300<\log_{10}2<0.302$ が示された。(証明終)