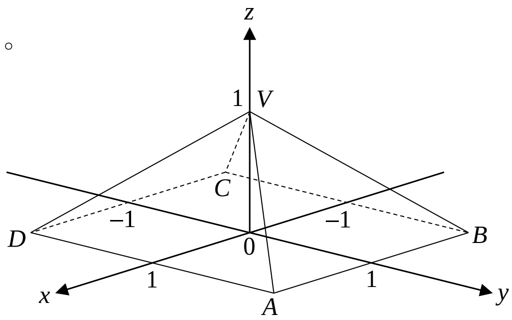
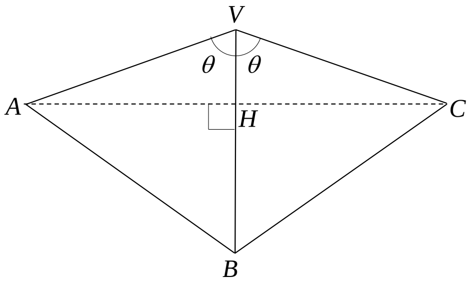
1968 年東大理 $\boxed{2}$ 文 $\boxed{2}$ 共通

底面の頂点を、 $A(1,\ 1,\ 0),\ B(1,\ -1,\ 0),\ C(-1,\ -1,\ 0),\ D(-1,\ 1,\ 0)$ とする。
底面と斜面の二面角が $45°$ より、頭頂点の座標は $V(0,\ 0,\ 1)$ である。
このとき、 $AV=BV=CV=DV=\sqrt{3}$ であり、各斜面は、
等辺の長さ $\sqrt{3}$ 、底辺の長さ 2 の二等辺三角形になっている。



ここで、隣り合う二つの斜面の、展開図を考える。
斜面の頂角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{3+3-4}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\qquad \sin\theta=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$



点 A から辺 BV に下ろした垂線の足を H とすると

$$AH=\sqrt{3}\sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$CH=AH=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ であり、展開前は $AC=2\sqrt{2}$ である。
求める二面角は、二等辺三角形 AHC の頂角 $\angle AHC$ に等しい。 $AH:AC=1:\sqrt{3}$ であるから

$$\cos\angle AHC=\frac{1+1-3}{2\cdot1\cdot1}=-\frac{1}{2}$$

求める二面角は　$\therefore 120°$ ……(答)