1968年東大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

$a+b+c=0$ より　$c=-(a+b)$　$f(x)=ax^2+bx-(a+b)=(x-1)(ax+a+b)=(x-1)\{a(x+1)+b\}$

$f(\alpha)=(\alpha-1)\{a(\alpha+1)+b\}$ より、$\alpha=1$ ならば、$a,\ b$ に関わらず、$f(\alpha)=0$ である。

$\alpha\neq 1$ のとき、$\alpha-1$ は定数であり、$a(\alpha+1)+b$ は任意の値をとり得るから、$f(\alpha)$ はすべての実数値をとる。

$\alpha=\beta=1$ のとき　$(f(\alpha),\ f(\beta))=(0,\ 0)$

$\alpha=1,\ \beta\neq 1$ のとき　$f(\alpha)=0$ であり、$f(\beta)$ はすべての実数値をとるから、$(f(\alpha),\ f(\beta))$ は y 軸全体を動く。

$\alpha\neq 1,\ \beta=1$ のとき　$f(\beta)=0$ であり、$f(\alpha)$ はすべての実数値をとるから、$(f(\alpha),\ f(\beta))$ は x 軸全体を動く。

$\alpha=\beta\neq 1$ のとき　$f(\alpha)=f(\beta)$ であるから、$(f(\alpha),\ f(\beta))$ は直線 $y=x$ 全体を動く。

$\alpha\neq\beta,\ \alpha\neq 1,\ \beta\neq 1$ のとき

$x=f(\alpha)=(\alpha-1)\{a(\alpha+1)+b\},\ y=f(\beta)=(\beta-1)\{a(\beta+1)+b\}$ として、a を固定して考える。

$\dfrac{x}{\alpha-1}=a(\alpha+1)+b,\ \dfrac{y}{\beta-1}=a(\beta+1)+b$ より、b を消去すると

$$\frac{y}{\beta-1}-\frac{x}{\alpha-1}=a(\beta-\alpha)\qquad y=\frac{\beta-1}{\alpha-1}x+a(\beta-\alpha)(\beta-1)$$

a を固定したとき、$(f(\alpha),\ f(\beta))$ は、直線 $y=\dfrac{\beta-1}{\alpha-1}x+a(\beta-\alpha)(\beta-1)$ 全体を動く。

$(\beta-\alpha)(\beta-1)\neq 0$ であり、この直線の切片 $a(\beta-\alpha)(\beta-1)$ は、a の値によって任意に変わる。

ただし、$f(x)$ は2次式であるから、$a\neq 0$ であり、$a(\beta-\alpha)(\beta-1)\neq 0$ である。

したがって、$(f(\alpha),\ f(\beta))$ は、直線 $y=\dfrac{\beta-1}{\alpha-1}x$ 上は動かない。

以上により、点 $(f(\alpha),\ f(\beta))$ 全体の集合は

　$\alpha=\beta=1$ のとき　$(0,\ 0)$ のみ

　$\alpha=1,\ \beta\neq 1$ のとき　y 軸全体

　$\alpha\neq 1,\ \beta=1$ のとき　x 軸全体

　$\alpha=\beta\neq 1$ のとき　直線 $y=x$ 全体

　$\alpha\neq\beta,\ \alpha\neq 1,\ \beta\neq 1$ のとき　座標平面全体のうち、直線 $y=\dfrac{\beta-1}{\alpha-1}x$ を除いた部分