1970 年東大文 $\boxed{1}$

(1)

$365=1\times 2^8+0\times 2^7+1\times 2^6+1\times 2^5+0\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2+1$

であるから、2 進法で表記すると　$\therefore 101101101$　……(答)

(2)

2 進法で 101101 と書かれる数は、10 進法では $1\times 2^5+0\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2+1=45$

2 進法で 1011 と書かれる数は、10 進法では $1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2+1=11$

$45\times 11=495$　$495=1\times 2^8+1\times 2^7+1\times 2^6+1\times 2^5+0\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2+1$

　$\therefore 111101111$　……(答)

(3)

x を 10 進法で書くと、

$$x=\sum_{k=0}^{m}(a_{3k+2}\times 2^{3k+2}+a_{3k+1}\times 2^{3k+1}+a_{3k}\times 2^{3k})=\sum_{k=0}^{m}(a_{3k+2}\times 2^2+a_{3k+1}\times 2+a_{3k})\times 2^{3k}$$

となる。$a_0, a_1, \cdots, a_{3m+2}$ は 0 か 1 をとり、最上位の 3 数 $a_{3m}, a_{3m+1}, a_{3m+2}$ のすべてが 0 ではないとする。

$y_k=a_{3k+2}\times 2^2+a_{3k+1}\times 2+a_{3k}$ とおけて、$0\leqq y_k\leqq 7$ である。

$$x=\sum_{k=0}^{m}y_k\times 2^{3k}=\sum_{k=0}^{m}y_k\times\left\{(2^{3k}-1)+1\right\}=\sum_{k=0}^{m}y_k\times(8^k-1)+\sum_{k=0}^{m}y_k$$

ここで、

$k\geqq 1$ のとき　$8^k-1=(8-1)\times(8^{k-1}+\cdots+8+1)=7\times(8^{k-1}+\cdots+8+1)$　$k=0$ のとき　$8^0-1=0$

であるから、$\sum_{k=0}^{m}y_k\times(8^k-1)$ は 7 で割り切れる。

したがって、$\sum_{k=0}^{m}y_k$ が 7 で割り切れるとき、x は 7 で割り切れる。(証明終)