1970 年東大理 $\boxed{1}$

(1)

m を自然数として、$a^{6m}=\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi=1$ であるから、$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について調べれば十分である。

$$a^1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\quad a^2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\quad a^3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$a^4=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\quad a^5=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\quad a^6=1$$

したがって、a^n がとり得る異なる値は　6 個 ……(答)

(2)

$n=6m$ のとき　$a^n=1$ であるから

$1-a^n=1-a^{2n}=1-a^{3n}=1-a^{4n}=1-a^{5n}=0\quad \therefore$ (与式) $=0$

$n=6m+1$ のとき　$a^n=a$ であるから

$1-a^n=1-a,\ 1-a^{2n}=1-a^2,\ 1-a^{3n}=1-a^3,\ 1-a^{4n}=1-a^4,\ 1-a^{5n}=1-a^5\quad \therefore$ (与式) $=1$

$n=6m+2$ のとき　$a^n=a^2$ であるから　$1-a^{3n}=1-a^6=0\quad \therefore$ (与式) $=0$

$n=6m+3$ のとき　$a^n=a^3$ であるから　$1-a^{2n}=1-a^6=0\quad \therefore$ (与式) $=0$

$n=6m+4$ のとき　$a^n=a^4$ であるから　$1-a^{3n}=1-a^{12}=0\quad \therefore$ (与式) $=0$

$n=6m+5$ のとき　$a^n=a^5$ であるから

$1-a^n=1-a^5,\ 1-a^{2n}=1-a^{10}=1-a^4,\ 1-a^{3n}=1-a^{15}=1-a^3$

$1-a^{4n}=1-a^{20}=1-a^2,\ 1-a^{5n}=1-a^{25}=1-a\quad \therefore$ (与式) $=1$

以上により、求める値は

n を 6 で割った余りが $1,\ 5$ のとき 1、それ以外のとき 0 ……(答)