1970年東大理$\boxed{4}$

(1)

噴出してから t 秒後の水の位置を $(x,\ y)$ とする。
穴の位置を $(0,\ a-h)$ とすると、$t=0$ のとき $x=0,\ y=a-h$ であるから

$$x=\sqrt{2gh}\,t \text{ ——①} \qquad y=a-h-\int_0^t gudu=a-h-g\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^t=a-h-\frac{1}{2}gt^2 \text{ ——②}$$

①より　$t=\dfrac{x}{\sqrt{2gh}}$　②に代入すると　$y=a-h-\dfrac{1}{2}g\cdot\dfrac{x^2}{2gh}=a-h-\dfrac{1}{4h}x^2$

$y=0$ となる x を求めると　$x^2=4h(a-h)$　$\therefore x=2\sqrt{h(a-h)}$

したがって、穴の真下から $2\sqrt{h(a-h)}$ (cm)離れた点に落ちる。……(答)

(2)

$x=2\sqrt{h(a-h)}=2\sqrt{-\left(h-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}}$ より、穴の位置を水面から $\dfrac{a}{2}$ (cm)にすればよい。……(答)

(3)

$y=a-h-\dfrac{1}{4h}x^2$ を整理すると　$4yh=4ah-4h^2-x^2$　$\therefore 4h^2-4(a-y)h+x^2=0$

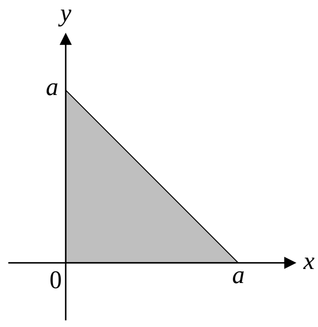
$f(h)=4h^2-4(a-y)h+x^2$ とおき、二次方程式 $f(h)=0$ が $0\leqq h\leqq a$ の範囲で実数解を持つ条件を考える。

$f(h)=4\left(h-\dfrac{a-y}{2}\right)^2-(a-y)^2+x^2$ であり、$0\leqq y\leqq a$ であるから、軸 $h=\dfrac{a-y}{2}$ は $0\leqq h\leqq\dfrac{a}{2}$ の範囲にある。

$f(0)=x^2\geqq 0$　$f(a)=4a^2-4(a-y)a+x^2=4ay+x^2\geqq 0$

$f\left(\dfrac{a-y}{2}\right)=-(a-y)^2+x^2\leqq 0$ であればよい。　$\therefore \{x-(a-y)\}\{x+(a-y)\}\leqq 0$

$0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq a$ より　$x+(a-y)\geqq 0$
したがって　$x-(a-y)\leqq 0$　$\therefore y\leqq a-x$ ……(答)
図示すると右図の通りで、境界線を含む。



※ $y=a-x$ は、$y=a-h-\dfrac{1}{4h}x^2$ の接線である。