1970 年東大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

$t=0$ のときの数直線上の $A,\ B$ の位置を、 $x=0,\ x=25$ とする。
t 秒後の A の位置は　$x=ut\ (u>0)$

t 秒後の B の位置は　$x=25+\int_0^t\left(\frac{3}{4}s^2-3s\right)ds=25+\left[\frac{s^3}{4}-\frac{3}{2}s^2\right]_0^t=\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+25$

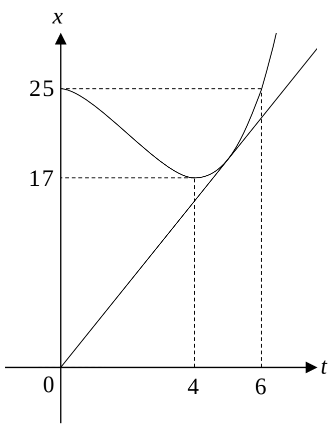
$\frac{dx}{dt}=v=\frac{3}{4}t^2-3t=\frac{3}{4}t(t-4)$

Q の位置の増減は右の通り。

t	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	0	$+$
x		$\searrow$		$\nearrow$

また、 $x=25$ を解くと　$\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2=0$ より　$t^2(t-6)=0$
B が再び Q に帰るのは 6 秒後である。

横軸に時間 t 、縦軸に位置 x をとって図示すると、右の通り。
A の位置変化は、原点を通る直線 $x=ut$ で表される。
$t\leqq 6$ の範囲で、 B の位置変化を表す曲線 $x=f(t)$ と共有点を持つことが、
A が B に出会うか追いつくための条件である。



そのような u の最小値は、図のような接線の傾きに等しい。

$x=f(t)$ 上の点 $\left(s,\ \frac{1}{4}s^3-\frac{3}{2}s^2+25\right)$ における接線は

$$x=\left(\frac{3}{4}s^2-3s\right)(t-s)+\frac{1}{4}s^3-\frac{3}{2}s^2+25=\left(\frac{3}{4}s^2-3s\right)t-\frac{1}{2}s^3+\frac{3}{2}s^2+25$$

これが原点を通るとき　$-\frac{1}{2}s^3+\frac{3}{2}s^2+25=0$　$s^3-3s^2-50=0$　$(s-5)(s^2+2s+10)=0$　$\therefore s=5$

したがって、原点を通る $x=f(t)$ の接線は　$\therefore x=\frac{15}{4}t$

u は少なくとも $\frac{15}{4}$ $m/$秒 でなければならない。……(答)