1971 年東大理 $\boxed{6}$

3 人でジャンケンをするとき

‘石’、‘ハサミ’、‘紙’の出し方は $3^3=27$ 通り。

1 人の勝者が決まる場合は

例えば 1 人が‘紙’を出し、2 人が‘石’を出すのは ${}_3C_1=3$ 通りであるから、全部で $3\times3=9$ 通り。

1 人の敗者が決まる場合は

例えば 2 人が‘紙’を出し、1 人が‘石’を出すのは ${}_3C_2=3$ 通りであるから、全部で $3\times3=9$ 通り。

1 人の勝敗も決まらない場合は、$27-18=9$ 通り。

1 人の勝者が決まる確率、1 人の敗者が決まる確率、1 人の勝敗も決まらない確率は、いずれも $\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$

2 人でジャンケンをするとき

‘石’、‘ハサミ’、‘紙’の出し方は $3^2=9$ 通り。

勝敗が決まらない場合は、2 人が同じ手を出したときで、3 通り。

勝敗が決まる場合は、$9-3=6$ 通り。

勝敗が決まる確率は $\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$ 勝敗が決まらない確率は $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

1 回目で 1 人の勝者が決まる確率は $\dfrac{1}{3}$

$k \geqq 2$ のとき

$k-1$ 回目まで 1 人の勝敗も決まらず、k 回目に 3 人でジャンケンをして 1 人の勝者が決まる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

j 回目 $(1\leqq j\leqq k-1)$ に 1 人の敗者が決まり、k 回目に 2 人でジャンケンをして勝者が決まる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j-1}\cdot\frac{2}{3}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

k 回目に 2 人でジャンケンをして勝者が決まる確率は ${}_{k-1}C_1\times2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k}=2(k-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k}$

以上により、k 回目に初めてちょうど 1 人の勝者が決まる確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k}+2(k-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k}=(2k-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k}$

これは $k=1$ のときも成立。

求める確率は $\therefore (2k-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k}$ ……(答)