1971 年東大理 $\boxed{2}$ 文 $\boxed{2}$ 共通

(1)

$a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2+1}{2}$ より、$k\geqq 1$ のとき　$a_{k+1}-a_k=\dfrac{a_k{}^2+1}{2}-a_k=\dfrac{(1-a_k)^2}{2}\geqq 0$ ——①

$a_1=\dfrac{x}{2}$ より、$x\neq 2$ ならば $a_1\neq 1$　したがって、①より $a_2-a_1>0$　$\therefore a_1<a_2$

また、$a_{k+1}=1$ とすると　$1=\dfrac{a_k{}^2+1}{2}$　$a_k{}^2=1$　$\{a_n\}$ は正数列であるから　$\therefore a_k=1$

したがって、$a_{k+1}=1$ となるのは $a_k=1$ の場合に限られる。

今、$a_1\neq 1$ であるから、$a_2\neq 1$ が示され、以下帰納的に $a_3\neq 1, a_4\neq 1, \cdots, a_n\neq 1, \cdots$ がわかる。

①より、帰納的に $a_3-a_2>0, a_4-a_3>0, \cdots, a_n-a_{n-1}>0, \cdots$ がわかるので

$\therefore a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$　(証明終)

(2)

$k\geqq 1$ のとき　$1-a_{k+1}=1-\dfrac{a_k{}^2+1}{2}=\dfrac{(1+a_k)(1-a_k)}{2}$ ——②

$a_1=\dfrac{x}{2}$ より、$x<2$ ならば $1>a_1$　$1-a_1>0$　したがって、②より $1-a_2>0$

以下帰納的に、$1-a_2>0$ ならば $1-a_3>0$、$1-a_3>0$ ならば $1-a_4>0\cdots$、$1-a_{n-1}>0$ ならば $1-a_n>0\cdots$

$\therefore a_n<1$　(証明終)

次に、$a_k\leqq 1-\varepsilon\,(k=1,2,\cdots,n)$ より　$1-a_k\geqq \varepsilon$　①より、$\therefore a_{k+1}-a_k\geqq \dfrac{\varepsilon^2}{2}$ ——③

$k=1$ から $k=n$ まで、③の両辺の和をとると、$\therefore a_{n+1}-a_1\geqq \dfrac{n\varepsilon^2}{2}$　$a_{n+1}\geqq a_1+\dfrac{n\varepsilon^2}{2}=\dfrac{x+n\varepsilon^2}{2}$

$a_{n+1}<1$ より　$1>\dfrac{x+n\varepsilon^2}{2}$　$2>x+n\varepsilon^2$　$\therefore 2-x>n\varepsilon^2$　(証明終)

(注)　$\varepsilon<1-\dfrac{x}{2}=1-a_1$ より、$a_1<1-\varepsilon$