1971年東大理 $\boxed{4}$ 文 $\boxed{4}$ 共通

$f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$　　$n \geqq 2$ のとき　$\therefore f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k!}=f_{n-1}(x)$（証明終）

$n=1$ のとき　$f_1(x)=1+x$ は単調増加であり、$f_1(x)=0$ はただ 1 つの実根 $x=-1$ を持つ。

$n=2$ のとき　$f_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}\left\{(x+1)^2+1\right\}>0$ であり、$f_2(x)=0$ は実根を持たない。

$n=2k-1$ のとき $f_n(x)$ は単調増加で $f_n(x)=0$ はただ 1 つの実根を持ち、$n=2k$ のとき $f_n(x)>0$ で $f_n(x)=0$ は実根を持たないと仮定する。

$n=2k+1$ のとき　$f_{2k+1}'(x)=f_{2k}(x)$

$f_{2k}(x)>0$ であるから、$f_{2k+1}(x)$ は単調増加。

また、$f_{2k+1}''(x)=f_{2k-1}(x)$ で、仮定より $f_{2k-1}(x)$ は単調増加であり、$f_{2k-1}(x)=0$ はただ 1 つの実根を持つ。これを $x=\alpha$ とおくと、$f_{2k+1}(x)$ は $x=\alpha$ においてただ 1 つの変曲点を持つ。

$x<\alpha$ のとき $f_{2k+1}''(x)<0$ で、$f_{2k+1}(x)$ は上に凸。$x>\alpha$ のとき $f_{2k+1}''(x)>0$ で、$f_{2k+1}(x)$ は下に凸。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f_{2k+1}'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f_{2k+1}''(x)$	$-$	0	$+$
$f_{2k+1}(x)$	↗		↗

したがって、$f_{2k+1}(x)$ は単調増加で $f_{2k+1}(x)=0$ はただ 1 つの実根を持つ。この実根を $x=\beta$ とおく。

$n=2k+2$ のとき　$f_{2k+2}'(x)=f_{2k+1}(x)$

$f_{2k+1}(x)$ は単調増加で $f_{2k+1}(x)=0$ はただ 1 つの実根 $x=\beta$ を持つから、$f_{2k+2}(x)$ は $x=\beta$ で極小となる。

$f_{2k+2}''(x)=f_{2k}(x)>0$ で $f_{2k}(x)=0$ は実根を持たないので、$f_{2k+2}(x)$ は変曲点を持たず、下に凸。

x	$\cdots$	β	$\cdots$
$f_{2k+2}'(x)$	$-$	0	$+$
$f_{2k+2}''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f_{2k+2}(x)$	↘		↗

$f_{2k+2}(x)=f_{2k+1}(x)+\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$ より　$f_{2k+2}(\beta)=f_{2k+1}(\beta)+\frac{\beta^{2k+2}}{(2k+2)!}=\frac{\beta^{2k+2}}{(2k+2)!}$

$f_{2k+2}(0)=1$ であるから、$\beta \neq 0$ であり、$f_{2k+2}(\beta)>0$

したがって、すべての実数 x について $f_{2k+2}(x)>0$ が成り立ち、$f_{2k+2}(x)=0$ は実根を持たない。

以上により、$n=2k+1$、$n=2k+2$ のときも成立し、題意は示された。（証明終）