1972 年東大文 $\boxed{3}$

$z=x+yi$ とおくと、$1\leqq x\leqq 2, 1\leqq y\leqq 2$ である。

$w=z^2=x^2-y^2+2xyi$　　$p=x^2-y^2, q=2xy$ とおく。$x\neq 0$ より　　$y=\dfrac{q}{2x}$　　$p=x^2-\dfrac{q^2}{4x^2}$　　$x^4-px^2-\dfrac{q^2}{4}=0$

x^2 についての 2 次方程式と見て、$x^2>0$ より

$$\therefore x^2=\frac{1}{2}(p+\sqrt{p^2+q^2})\quad \therefore y^2=\frac{q^2}{4x^2}=\frac{q^2}{2(p+\sqrt{p^2+q^2})}=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{p^2+q^2})$$

$1\leqq x^2\leqq 4, 1\leqq y^2\leqq 4$ より

$$2\leqq p+\sqrt{p^2+q^2}\leqq 8, 2\leqq -p+\sqrt{p^2+q^2}\leqq 8\quad 2-p\leqq\sqrt{p^2+q^2}\leqq 8-p, 2+p\leqq\sqrt{p^2+q^2}\leqq 8+p$$

$8-p\geqq 0, 8+p\geqq 0$ でなければならないから、$-8\leqq p\leqq 8$ の条件下で、

$p\geqq 0$ のとき　$2-p\leqq 2+p\leqq\sqrt{p^2+q^2}\leqq 8-p\leqq 8+p$ であり、

$$(2+p)^2\leqq p^2+q^2\leqq(8-p)^2\quad 4+4p\leqq q^2\leqq 64-16p\quad \therefore p\leqq\frac{1}{4}q^2-1, p\leqq-\frac{1}{16}q^2+4 \text{ ——①}$$

$p\leqq 0$ のとき　$2+p\leqq 2-p\leqq\sqrt{p^2+q^2}\leqq 8+p\leqq 8-p$ であり、

$$(2-p)^2\leqq p^2+q^2\leqq(8+p)^2\quad 4-4p\leqq q^2\leqq 64+16p\quad \therefore p\geqq-\frac{1}{4}q^2+1, p\geqq\frac{1}{16}q^2-4 \text{ ——②}$$

①、②より (p,q) の存在範囲を図示すると右の通りで、$-8\leqq p\leqq 8$ を満たす。

この面積は、対称性より

$$2\times\left\{\int_2^4\left(\frac{1}{4}q^2-1\right)dq+\int_4^8\left(-\frac{1}{16}q^2+4\right)dq\right\}$$

$$=2\times\left\{\left[\frac{1}{12}q^3-q\right]_2^4+\left[-\frac{1}{48}q^3+4q\right]_4^8\right\}$$

$$=2\times\left\{\frac{64-8}{12}-(4-2)-\frac{512-64}{48}+4(8-4)\right\}$$

$$=2\times\left(\frac{14}{3}-2-\frac{28}{3}+16\right)=2\times\left(14-\frac{14}{3}\right)$$

$$=\frac{56}{3}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$