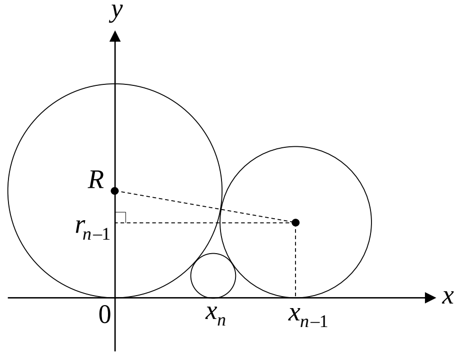
1972年東大理$\boxed{3}$文$\boxed{4}$共通

共通接線lをx軸とし、円Cの中心を$(0,\ R)$としても一般性を失わない。
円$C',\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n$は$x$軸の正の側にあるとし、中心の$x$座標をそれぞれ$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$とする。



CとC_{n-1}が接するとき

$(R+r_{n-1})^2=(R-r_{n-1})^2+{x_{n-1}}^2 \quad {x_{n-1}}^2=4Rr_{n-1}$

$\therefore x_{n-1}=2\sqrt{Rr_{n-1}}$ ——①

同様に、CとC_nが接するとき　$x_n=2\sqrt{Rr_n}$ ——②

C_nとC_{n-1}が接するとき、$0<x_n<x_{n-1}$であるから

$(r_{n-1}+r_n)^2=(r_{n-1}-r_n)^2+(x_{n-1}-x_n)^2 \quad (x_{n-1}-x_n)^2=4r_{n-1}r_n \quad \therefore x_{n-1}-x_n=2\sqrt{r_{n-1}r_n}$ ——③

①、②、③より　$2\sqrt{Rr_{n-1}}-2\sqrt{Rr_n}=2\sqrt{r_{n-1}r_n}$

両辺を$\sqrt{r_{n-1}r_n}$で割ると　$\sqrt{\dfrac{R}{r_n}}-\sqrt{\dfrac{R}{r_{n-1}}}=1 \quad \therefore \sqrt{\dfrac{R}{r_n}}=\sqrt{\dfrac{R}{r_{n-1}}}+1$

数列$\left\{\sqrt{\dfrac{R}{r_n}}\right\}$は、公差1の等差数列であるから　$\sqrt{\dfrac{R}{r_n}}=\sqrt{\dfrac{R}{R'}}+n \quad \dfrac{R}{r_n}=\dfrac{R}{R'}+2n\sqrt{\dfrac{R}{R'}}+n^2$

$$\frac{r_n}{R}=\frac{1}{\dfrac{R}{R'}+2n\sqrt{\dfrac{R}{R'}}+n^2} \quad \therefore n^2r_n=\frac{n^2R}{\dfrac{R}{R'}+2n\sqrt{\dfrac{R}{R'}}+n^2}=\frac{R}{\dfrac{R}{n^2R'}+\dfrac{2}{n}\sqrt{\dfrac{R}{R'}}+1}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} n^2r_n=R$ ……(答)