1972 年東大理 $\boxed{5}$

$$u(x)=\int_0^x f(t)h(t)dt+h(x)\int_x^1 f(t)dt \qquad \frac{du}{dx}=f(x)h(x)+h'(x)\int_x^1 f(t)dt-h(x)f(x)=h'(x)\int_x^1 f(t)dt$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=h''(x)\int_x^1 f(t)dt-h'(x)f(x)=f(x)$$

$f(x)=ax+b$ とすると

（解答 1）

$$h''(x)\int_x^1 (at+b)-h'(x)(ax+b)-(ax+b)$$
$$=h''(x)\left[\frac{a}{2}t^2+bt\right]_x^1-\{h'(x)+1\}(ax+b)=h''(x)\left(\frac{a}{2}+b-\frac{a}{2}x^2-bx\right)-\{h'(x)+1\}(ax+b)$$
$$=a\left\{\frac{1}{2}h''(x)-\frac{1}{2}x^2h''(x)-xh'(x)-x\right\}+b\{h''(x)-xh''(x)-h'(x)-1\}=0$$

任意の $a,\ b$ について成立するので

$$\frac{1}{2}h''(x)-x-\left\{\frac{1}{2}x^2h''(x)+xh'(x)\right\}=0 \text{ ——①} \qquad h''(x)-1-\{xh''(x)+h'(x)\}=0 \text{ ——②}$$

①の両辺を積分すると　$\frac{1}{2}h'(x)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2h'(x)=C \qquad \therefore(1-x^2)h'(x)-x^2=C$ ——③

②の両辺を積分すると　$h'(x)-x-xh'(x)=D \qquad \therefore(1-x)h'(x)=x+D$ ——④

③、④は任意の x について成立する。④を③に代入すると

$(1+x)(x+D)-x^2=x^2+(1+D)x+D-x^2=(1+D)x+D=C \qquad \therefore(1+D)x+(D-C)=0$ ——⑤

⑤が任意の x について成立するには　$\therefore C=-1,\ D=-1$

したがって、④より　$(1-x)h'(x)=x-1 \qquad (1-x)\{h'(x)+1\}=0$ ——⑥

⑥が任意の x について成立するには　$h'(x)=-1$　このとき③も成立。　$\therefore h(x)=-x+E$

ここで　$u(0)=h(0)\int_0^1 f(t)dt=0 \qquad \int_0^1 f(t)dt$ は定数であるから　$\therefore h(0)=0 \qquad \therefore h(x)=-x$ ……（答）

（解答 2）

$f(x)=ax+b$ とすると　$\frac{d^2u}{dx^2}=ax+b$ より　$\frac{du}{dx}=\frac{a}{2}x^2+bx+C$

$x=1$ のとき $\frac{du}{dx}=0$ であるから　$\therefore C=-\frac{a}{2}-b$

$$\frac{du}{dx}=\frac{a}{2}x^2+bx-\frac{a}{2}-b=h'(x)\int_x^1(at+b)dt=h'(x)\left[\frac{a}{2}t^2+bt\right]_x^1=h'(x)\left(\frac{a}{2}+b-\frac{a}{2}x^2-bx\right)$$

$$\therefore\left(\frac{a}{2}x^2+bx-\frac{a}{2}-b\right)\{h'(x)+1\}=0$$

任意の $a,\ b,\ x$ について成立するには　$\therefore h'(x)=-1$　以下、（解答 1）と同じ。