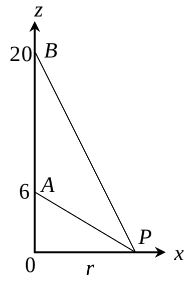
1972年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通



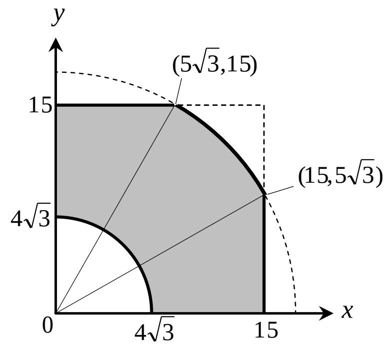
原点$O(0,0,0)$と$P(x,y,0)$の距離$r=\sqrt{x^2+y^2}$の取り得る範囲を求める。

$\angle OPA=\alpha, \angle OPB=\beta, \angle APB=\theta$とすると$\theta=\beta-\alpha$であり、

$$\tan\alpha=\frac{6}{r} \quad \tan\beta=\frac{20}{r} \quad \tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{20}{r}-\frac{6}{r}}{1+\frac{20}{r}\cdot\frac{6}{r}}=\frac{14r}{r^2+120}$$

$\theta \geqq 30°$より　$\tan\theta=\dfrac{14r}{r^2+120}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$r^2-14\sqrt{3}r+120\leqq 0$　$(r-4\sqrt{3})(r-10\sqrt{3})\leqq 0$

$\therefore 4\sqrt{3}\leqq r\leqq 10\sqrt{3}$　$\therefore 48\leqq x^2+y^2\leqq 300$ ——①



①と、$0\leqq x\leqq 15$、$0\leqq y\leqq 15$の共通範囲をxy平面に図示すると、
右の通り。面積を求めると、

$$2\times\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 5\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot(10\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(4\sqrt{3})^2=75\sqrt{3}+13\pi \cdots\cdots(答)$$