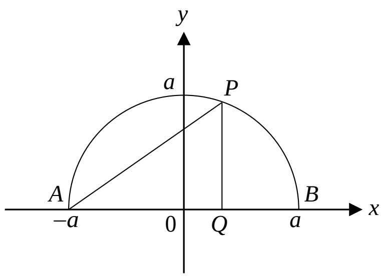
1973 年東大文 $\boxed{2}$



半円の方程式を $x^2+y^2=a^2$ $(y \geqq 0)$ とする。
点 P の座標は $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ とおけて、
$PQ=a\sin\theta,\ AQ=a(1+\cos\theta)$ である。

△ APQ を AB のまわりに回転してできる立体は、
底面の半径 $a\sin\theta$ 、高さ $a(1+\cos\theta)$ の円錐であるから、体積は

$$\frac{1}{3}\pi(a^2\sin^2\theta)\cdot a(1+\cos\theta)=\frac{1}{3}\pi a^3(1-\cos^2\theta)(1+\cos\theta)=\frac{1}{3}\pi a^3(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)^2$$

$f(t)=(1-t)(1+t)^2$ $(-1<t<1)$ とすると

$$f'(t)=-(1+t)^2+2(1-t)(1+t)=(1+t)\{-(1+t)+2(1-t)\}=(1+t)(1-3t)$$

$f(t)$ の増減は右の通りで、$t=\dfrac{1}{3}$ のとき極大。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		＋	0	−	
$f(t)$		↗		↘	

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{16}{9}=\dfrac{32}{27}$ であるから、求める最大値は

$$\therefore \frac{1}{3}\pi a^3\cdot\frac{32}{27}=\frac{32}{81}\pi a^3 \quad \cdots\cdots(答)$$