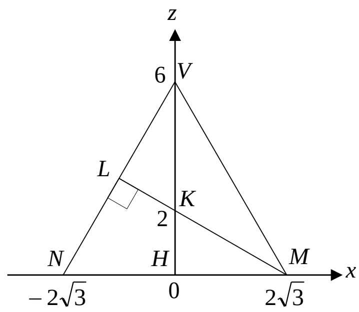
1973 年東大文 $\boxed{3}$

空間座標系において、

$H(0,\ 0,\ 0),\ V(0,\ 0,\ 6),\ A(2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ 0),\ B(2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3},\ 0),\ C(-2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3},\ 0),\ D(-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ 0)$

とすると、 $K(0,\ 0,\ 2)$ である。



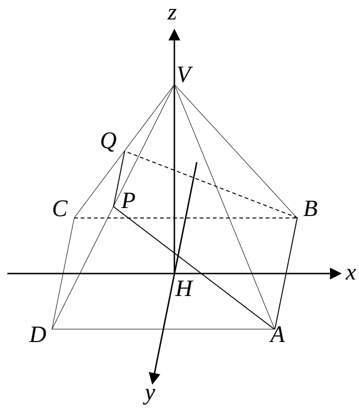
AB の中点を $M(2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ 、 CD の中点を $N(-2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ とおき、

xz 平面による断面を考える。

断面 VMN は一辺が $4\sqrt{3}$ の正三角形である。

$\tan\angle HMK = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　 $\angle HMK = \dfrac{\pi}{6}$

MK の延長が VN とぶつかる点を L とすると、 L は VN の中点である。



したがって、 $A,\ B,\ K$ を通る平面と、$VD,\ VC$ の交点 $P,\ Q$ は、

それぞれ $VD,\ VC$ の中点となる。

$AB \,/\!/\, PQ$ であり、四角形 $ABQP$ は台形である。相似性より、 $PQ = 2\sqrt{3}$ 。

台形 $ABQP$ の高さは ML に等しく、 $ML = 6$。

台形 $ABQP$ の面積は　 $\dfrac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3}+4\sqrt{3})\cdot 6 = 18\sqrt{3}$

一方、 $\angle MLV = \dfrac{\pi}{2}$ であり、VL は V と台形 $ABQP$ の距離に等しい。 $VL = 2\sqrt{3}$ 。

以上により、四角錐 $V-ABQP$ の体積は　 $\dfrac{1}{3}\cdot 18\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 36$ ……(答)