1973 年東大理 $\boxed{1}$

球面 S の方程式を $x^2+y^2+z^2=a^2$ 、$N\left(\dfrac{a}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$、$ON$ と $\dfrac{\pi}{3}$ の角度で交わる平面を xy 平面としても、一般性を失わない。P は、xy 平面上で $x^2+y^2=16a^2$ 上を動く。

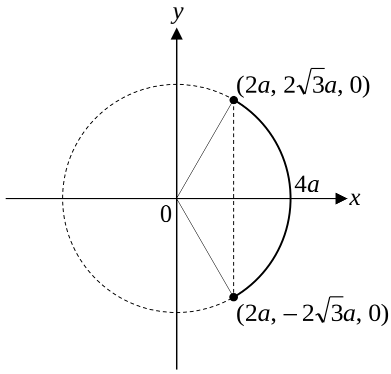
N から見える範囲とは、球面 S の N における接平面 α を境界に、原点 O がある側の反対側である。

α の方向ベクトルは $\overrightarrow{ON}=\left(\dfrac{a}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ であり、α の方程式は

$$\frac{a}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=0 \quad \therefore x+\sqrt{3}z=2a \text{ ——①}$$

①と xy 平面上の円 $x^2+y^2=16a^2$ の交点は、$(2a,\ \pm2\sqrt{3}a,\ 0)$ である。

xy 平面上に N から見える範囲を図示すると、右図の通り。



この弧に対応する中心角は $\dfrac{2}{3}\pi$ で、P の角速度は毎秒 $\dfrac{\pi}{12}$ であるから、

P が見え始めてから見え続ける時間は　$\dfrac{2}{3}\pi\cdot\dfrac{12}{\pi}=8$ 秒 ……(答)

P が見えている間の座標を、$(4a\cos\theta,\ 4a\sin\theta,\ 0)\left(-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ とおく。

$$\overline{NP}^2=\left(4a\cos\theta-\frac{a}{2}\right)^2+16a^2\sin^2\theta+\frac{3}{4}a^2=16a^2+a^2-4a^2\cos\theta=a^2(17-4\cos\theta)$$

最大になるのは $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$、$\theta=\pm\dfrac{\pi}{3}$ のときで、$\overline{NP}^2=15a^2$

最小になるのは $\cos\theta=1$、$\theta=0$ のときで、$\overline{NP}^2=13a^2$

$\overline{NP}$ の最大値は $\sqrt{15}a$、最小値は $\sqrt{13}a$ ……(答)