1974年東大理$\boxed{6}$

(1)

$A$が優勝する確率を求める。$A$が優勝する場合は、

i) $A$が最初から3連勝

ii) 3試合目まで$A$の2勝1敗で、4試合目に$A$が勝つ

iii) 4試合目まで$A$の2勝2敗で、5試合目に$A$が勝つ

のいずれかであるから、

$$P=p^3+p\times{}_3C_1\cdot p^2(1-p)+p\times{}_4C_2\cdot p^2(1-p)^2=p^3+3p^3(1-p)+6p^3(1-p)^2=p^3(6p^2-15p+10)$$

$P+Q=1$より　$Q=1-P$　$P-Q=2P-1$

$p+q=1$より　$q=1-p$　$p-q=2p-1$　$p-q>0$より　$\therefore \dfrac{1}{2}<p<1$

$$(P-Q)-(p-q)=(2P-1)-(2p-1)=2(P-p)$$

$$P-p=p^3(6p^2-15p+10)-p=p(6p^4-15p^3+10p^2-1)=p(p-1)(2p-1)(3p^2-3p-1)$$

$\dfrac{1}{2}<p<1$より、$p>0,\ p-1<0,\ 2p-1>0$

$3p^2-3p-1=3\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}$は$\dfrac{1}{2}<p<1$で単調増加で、$-\dfrac{7}{4}<3p^2-3p-1<-1$　$\therefore 3p^2-3p-1<0$

したがって、$\dfrac{1}{2}<p<1$において$P-p>0$であるから、

$$(P-Q)-(p-q)=2(P-p)>0\quad \therefore P-Q>p-q$$ ……(答)

(2)

$f(p)=P-p=6p^5-15p^4+10p^3-p$とすると、$f'(p)=30p^4-60p^3+30p^2-1=30p^2(1-p)^2-1$

$f'(p)=0$とすると、$0<p<1$において$p(1-p)>0$より

$p(1-p)=\dfrac{1}{\sqrt{30}}$　$30p^2-30p+\sqrt{30}=0$　$\therefore p=\dfrac{15\pm\sqrt{225-30\sqrt{30}}}{30}$　いずれも$0<p<1$を満たす。

$f'(p)<0$のとき、$0<p(1-p)<\dfrac{1}{\sqrt{30}}$で、

$$30p^2-30p+\sqrt{30}>0\quad \therefore 0<p<\frac{15-\sqrt{225-30\sqrt{30}}}{30},\ \frac{15+\sqrt{225-30\sqrt{30}}}{30}<p<1$$

$f'(p)>0$のとき、$\dfrac{1}{\sqrt{30}}<p(1-p)$で、

$$30p^2-30p+\sqrt{30}<0\quad \therefore \frac{15-\sqrt{225-30\sqrt{30}}}{30}<p<\frac{15+\sqrt{225-30\sqrt{30}}}{30}$$

$f(p)$の増減は次のようになる。

| $p$ | 0 | … | $\dfrac{15-\sqrt{225-30\sqrt{30}}}{30}$ | … | $\dfrac{15+\sqrt{225-30\sqrt{30}}}{30}$ | … | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(p)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| $f(p)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

$f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(1)=0$ であるから、 $f\left(\dfrac{15-\sqrt{225-30\sqrt{30}}}{30}\right)<0,\ f\left(\dfrac{15+\sqrt{225-30\sqrt{30}}}{30}\right)>0$

以上により、$P-p$ を最大にする $p$ は　$\therefore p=\dfrac{15+\sqrt{225-30\sqrt{30}}}{30}$　……(答)

(3)

$N=3$ になるのは $A, B$ いずれかが 3 連勝するときで、確率は

$$p^3+(1-p)^3=1-3p+3p^2$$

$N=5$ になるのは 4 試合を終えて 2 勝 2 敗のときで、確率は

$${}_4C_2\cdot p^2(1-p)^2=6p^2(1-p)^2=6(p^2-2p^3+p^4)$$

$N=4$ になる確率は、余事象より

$$1-(1-3p+3p^2)-6(p^2-2p^3+p^4)=3p-9p^2+12p^3-6p^4$$

$N$ の期待値 $E(N)$ は

$$E(N)=3\times(1-3p+3p^2)+4\times(3p-9p^2+12p^3-6p^4)+5\times6(p^2-2p^3+p^4)$$

$$=6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$$

$g(p)=6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$ とすると、$g'(p)=24p^3-36p^2+6p+3=3(2p-1)(4p^2-4p-1)$

$4p^2-4p-1=0$ を解くと、$p=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$ であるが、$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}<0,1<\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ であるから、

$0<p<1$ のとき $4p^2-4p-1<0$。したがって $g(p)$ の増減は次の通り。

| $p$ | 0 | … | $\dfrac{1}{2}$ | … | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(p)$ | | + | 0 | − | |
| $g(p)$ | | ↗ | | ↘ | |

$E(N)$ を最大にする $p$ は　$\therefore p=\dfrac{1}{2}$　……(答)

このとき $E(N)$ は

$\therefore E(N)=\dfrac{6}{16}-\dfrac{12}{8}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{33}{8}$　……(答)