1974年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

$f_p(n)$とは、n^pを10で割った余りを意味する。

一般の自然数nは、$n=10q+r\ (q\geqq 0,\ 0\leqq r\leqq 9)$と表せる。このとき、

$$n^p=(10q+r)^p=\sum_{k=0}^{q-1}{}_pC_k(10q)^{p-k}r^k+r^p=(10\text{の倍数})+r^p$$

であるから、n^pを10で割った余りは、r^pを10で割った余りに等しく、$f_p(n)=f_p(r)$である。

(1)

$r=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$について、r^2を10で割った余りを調べれば十分である。

$0^2=0,\quad 1^2=1,\quad 2^2=4,\quad 3^2=9,\quad 4^2=16,\quad 5^2=25,\quad 6^2=36,\quad 7^2=49,\quad 8^2=64,\quad 9^2=81$

したがって、$f_2(n)$が取る値は　$\therefore 0,1,4,5,6,9$ ……(答)

(2)

$r=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$について、r^5を10で割った余りを調べる。

$0^5=0,\quad 1^5=1,\quad 2^5=32,\quad 3^5=243,\quad 4^5=1024,\quad 5^5=3125$

$6^5=(10-4)^5=(10\text{の倍数})-4^5=(10\text{の倍数})-4=(10\text{の倍数})+6$

$7^5=(10-3)^5=(10\text{の倍数})-3^5=(10\text{の倍数})-3=(10\text{の倍数})+7$

$8^5=(10-2)^5=(10\text{の倍数})-2^5=(10\text{の倍数})-2=(10\text{の倍数})+8$

$9^5=(10-1)^5=(10\text{の倍数})-1=(10\text{の倍数})+9$

したがって、$f_5(r)=f_1(r)$であるから、$f_5(n)=f_1(n)$が示された。(証明終)

(3)

$r=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$について、r^{100}を10で割った余りを調べる。

$r^{100}=(r^{25})^4$であり、まず$r^{25}=(r^5)^5$について調べる。

(2)より、$f_5(r)$は$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$のすべての値を取る。

したがって、$f_{25}(r)$も$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$のすべての値を取る。

結局$f_{100}(r)=f_4(r)$であり、r^4を10で割った余りを調べれば十分である。

$r^4=(r^2)^2$であり、(1)より$f_2(r)$が取る値は$0,1,4,5,6,9$であるから、

$0^2=0,\quad 1^2=1,\quad 4^2=16,\quad 5^2=25,\quad 6^2=36,\quad 9^2=81$

したがって、$f_4(r)=f_{100}(n)$が取る値は　$\therefore 0,1,5,6$ ……(答)