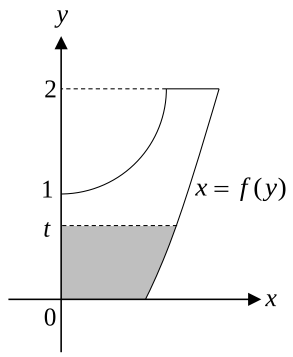
1975 年東大文 $\boxed{4}$

$x=f(y)$ が、$1<x\leqq 2$ において、 $f(y)>\sqrt{1-(y-2)^2}$ を満たすと仮定する。

$0\leqq t\leqq 1$ のとき

$V(t)=\pi\int_0^t\{f(y)\}^2dy=\dfrac{2}{3}\pi(t^2+t)$ $\int_0^t\{f(y)\}^2dy=\dfrac{2}{3}(t^2+t)$

両辺を t で微分すると $\{f(t)\}^2=\dfrac{2}{3}(2t+1)$ $\therefore f(y)=\sqrt{\dfrac{2}{3}(2y+1)}$



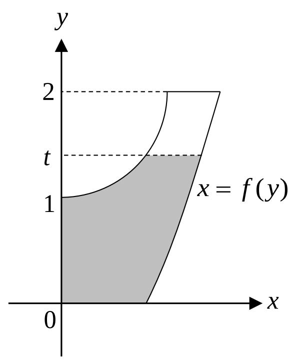
$1<t\leqq 2$ のとき

$V(t)=\pi\int_0^t\{f(y)\}^2dy-\pi\int_1^t\left\{1-(y-2)^2\right\}dy=\pi\left(\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+4t-\dfrac{3}{2}\right)$

$\int_0^t\{f(y)\}^2dy-\int_1^t\left\{1-(y-2)^2\right\}dy=\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+4t-\dfrac{3}{2}$

両辺を t で微分すると $\{f(t)\}^2-\left\{1-(t-2)^2\right\}=t^2-3t+4$

$\{f(t)\}^2=1-(t^2-4t+4)+t^2-3t+4=t+1$ $\therefore f(y)=\sqrt{y+1}$



$\sqrt{1-(y-2)^2}\leqq 1<\sqrt{2}<f(y)$ であるから、 $f(y)>\sqrt{1-(y-2)^2}$ が成立。

以上により

$0\leqq y\leqq 1$ のとき $f(y)=\sqrt{\dfrac{2}{3}(2y+1)}$ 、$1<y\leqq 2$ のとき $f(y)=\sqrt{y+1}$ ……(答)

A の xy 平面による断面は、右図の通り。

なお、 $x=f(y)$ は $y=1$ において連続であるが、
$y=1$ において微分不可能である。