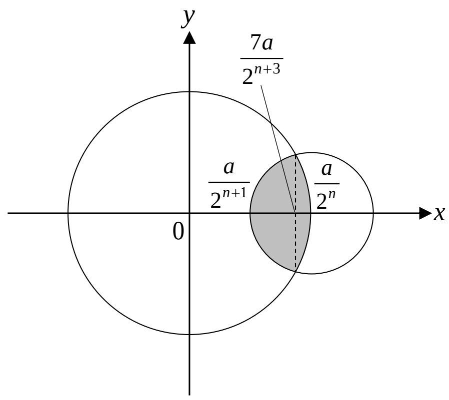
1975 年東大理 5

（i）

座標平面において、円 C_n を $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2^{2n}}$ 、円 C_{n+1} を $\left(x-\dfrac{a}{2^n}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{2^{2n+2}}$ とする。

v_n は、C_n と C_{n+1} の両方の内部（周を含む）に含まれる部分を、
x 軸中心に一回転して得られる立体の体積に等しい。



両円の交点の x 座標を求めると

$$\frac{a}{2^{n-1}}x-\frac{a^2}{2^{2n}}=\frac{a^2}{2^{2n}}-\frac{a^2}{2^{2n+2}}\qquad 2^{n+3}ax=(2^3-1)a^2\qquad \therefore x=\frac{7a}{2^{n+3}}$$

$$v_n=\pi\int_{\frac{7a}{2^{n+3}}}^{\frac{a}{2^n}}\left(\frac{a^2}{2^{2n}}-x^2\right)dx+\pi\int_{\frac{a}{2^{n+1}}}^{\frac{7a}{2^{n+3}}}\left\{\frac{a^2}{2^{2n+2}}-\left(x-\frac{a}{2^n}\right)^2\right\}dx$$

ここで、$x=\dfrac{a}{2^n}t$ とおくと　$dx=\dfrac{a}{2^n}dt$

$$v_n=\pi\int_{\frac{7}{8}}^{1}\left(\frac{a^2}{2^{2n}}-\frac{a^2}{2^{2n}}t^2\right)\cdot\frac{a}{2^n}dt+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{8}}\left\{\frac{a^2}{2^{2n+2}}-\left(\frac{a}{2^n}t-\frac{a}{2^n}\right)^2\right\}\cdot\frac{a}{2^n}dt$$

$$=\frac{a^3}{2^{3n}}\pi\int_{\frac{7}{8}}^{1}(1-t^2)dt+\frac{a^3}{2^{3n}}\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{8}}\left\{\frac{1}{4}-(t-1)^2\right\}dt$$

$$\pi\int_{\frac{7}{8}}^{1}(1-t^2)dt+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{8}}\left\{\frac{1}{4}-(t-1)^2\right\}dt$$

$$=\pi\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{7}{8}}^{1}+\pi\left[\frac{1}{4}t-\frac{(t-1)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{8}}=\pi\left(1-\frac{1}{3}-\frac{7}{8}+\frac{343}{1536}+\frac{7}{32}+\frac{1}{1536}-\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)$$

$$=\pi\frac{344-512-64+336}{1536}=\frac{104}{1536}\pi=\frac{13}{192}\pi$$

したがって　$\therefore v_n=\dfrac{13}{192}\pi\cdot\dfrac{a^3}{2^{3n}}=\dfrac{13}{192}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n\pi a^3$ ……（答）

（ii）

$$V_m=\frac{13}{192}\pi a^3\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^n=\frac{13}{192}\pi a^3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m}{1-\frac{1}{8}}=\frac{13}{1344}\pi a^3\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}$$

$\therefore \displaystyle\lim_{m\to\infty}V_m=\frac{13}{1344}\pi a^3$ ……（答）