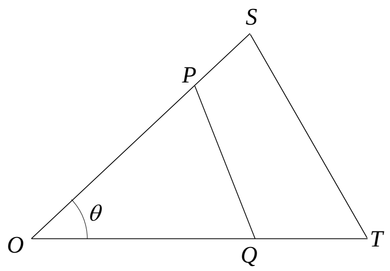
1975年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

三角形OSTにおいて、$ST=a,\ OS=b,\ OT=c,\ \angle SOT=\theta$とする。
辺$OS,\ OT$上にそれぞれ点$P,\ Q$があり、$OP=sb, OQ=tc\ (0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$とする。
三角形OPQの面積が三角形OSTの面積の半分になるとき



$$\frac{1}{2}stbc\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin\theta \quad \therefore st=\frac{1}{2}$$

余弦定理より　$PQ^2=s^2b^2+t^2c^2-2sb\cdot tc\cos\theta=s^2b^2+t^2c^2-bc\cos\theta$

$\cos\theta=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$であるから　$PQ^2=s^2b^2+t^2c^2-\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$

$s\neq 0$より　$t=\dfrac{1}{2s}$　$PQ^2=s^2b^2+\dfrac{c^2}{4s^2}-\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$

相加平均・相乗平均の関係より　$s^2b^2+\dfrac{c^2}{4s^2}\geqq 2\sqrt{s^2b^2\cdot\dfrac{c^2}{4s^2}}=2\sqrt{\dfrac{b^2c^2}{4}}=bc$

等号が成立するには　$s^2b^2=\dfrac{c^2}{4s^2}$　$s^4=\dfrac{c^2}{4b^2}$　$\therefore s=\sqrt{\dfrac{c}{2b}},\ t=\sqrt{\dfrac{b}{2c}}$

ここで、$b,\ c$を$25, 32, 36$のいずれから選んでも、$0<s<1,\ 0<t<1$が成立。

$s=\sqrt{\dfrac{c}{2b}},\ t=\sqrt{\dfrac{b}{2c}}$のとき、$PQ^2$は最小値$bc-\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2}$をとる。

$a=25$とすると　$PQ^2=\dfrac{625-(36-32)^2}{2}=\dfrac{609}{2}$

$a=32$とすると　$PQ^2=\dfrac{1024-(36-25)^2}{2}=\dfrac{903}{2}$

$a=36$とすると　$PQ^2=\dfrac{1296-(32-25)^2}{2}=\dfrac{1247}{2}$

PQが最小になるのは$a=25$のとき。このとき、上記の頂点Oは頂点Cに当たり、$P,\ Q$は$CB,\ CA$上にある。

$b=32,\ c=36$とすると　$s=\sqrt{\dfrac{36}{64}}=\dfrac{3}{4},\ t=\sqrt{\dfrac{32}{72}}=\dfrac{2}{3}$

PがCBを$3:1$に内分し、QがCAを$2:1$に内分するとき、PQは最短になる。……(答)
PとQが逆でもよい。