1976年東大理$\boxed{4}$

（i）

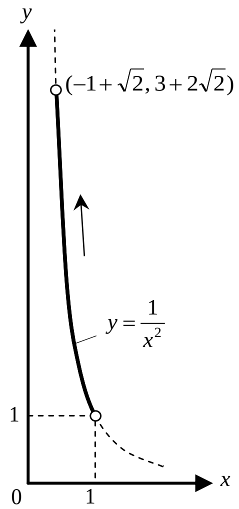
$f(x)=\dfrac{x+t}{x(1-tx)}$　　$0<t<1$であるから、$1<\dfrac{1}{t}$

$$f'(x)=\frac{1\cdot x(1-tx)-(x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2}=\frac{x-tx^2-(x-2tx^2+t-2t^2x)}{x^2(1-tx)^2}=\frac{tx^2+2t^2x-t}{x^2(1-tx)^2}=\frac{t(x^2+2tx-1)}{x^2(1-tx)^2}$$

$x^2+2tx-1=0$を解くと、$x=-t\pm\sqrt{t^2+1}$　　$0<-t+\sqrt{t^2+1}=\dfrac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}<1$より　　$\therefore x=-t+\sqrt{t^2+1}$

x	0	$\cdots$	$-t+\sqrt{t^2+1}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

増減表より　$\alpha=-t+\sqrt{t^2+1}$



$$f(\alpha)=\frac{\sqrt{t^2+1}}{(-t+\sqrt{t^2+1})(1+t^2-t\sqrt{t^2+1})}=\frac{1}{(-t+\sqrt{t^2+1})^2}=\frac{1}{\alpha^2}$$より、

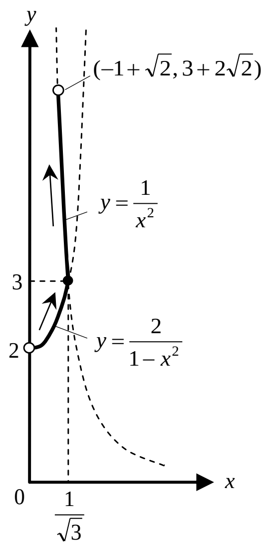
点$(\alpha,\ f(\alpha))$は$y=\dfrac{1}{x^2}$上を動く。

$\dfrac{d\alpha}{dt}=-1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}<-1+1=0$より、$\alpha$は$0<t<1$において単調減少で、$-1+\sqrt{2}<\alpha<1$

したがって、tが0から1に向かって動くとき、点$(\alpha,\ f(\alpha))$は、

$y=\dfrac{1}{x^2}$上を$(1,1)$から$(-1+\sqrt{2},3+2\sqrt{2})$に向かって動く。

（ii）



tと$-t+\sqrt{t^2+1}$の大小関係を調べる。　　$(-t+\sqrt{t^2+1})-t=\sqrt{t^2+1}-2t=\dfrac{1-3t^2}{\sqrt{t^2+1}+2t}$

$0<t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のとき　$t\leqq-t+\sqrt{t^2+1}$　　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<1$のとき　$t>-t+\sqrt{t^2+1}$

$0<t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のとき、$f(x)$は$0<x\leqq t$で単調減少であるから

$$\therefore\beta=t\qquad f(\beta)=\frac{2t}{t(1-t^2)}=\frac{2}{1-t^2}=\frac{2}{1-\beta^2}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<1$のとき、（i）より　$\beta=-t+\sqrt{t^2+1}$　　$f(\beta)=\dfrac{1}{\beta^2}$

したがって、tが0から1に向かって動くとき、点$(\beta,\ f(\beta))$は、

$y=\dfrac{2}{1-x^2}$上を$(0,2)$から$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},3\right)$に向かって動き、$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},3\right)$に達した後は$y=\dfrac{1}{x^2}$上を$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},3\right)$から$(-1+\sqrt{2},3+2\sqrt{2})$に向かって動く。