1976 年東大理 $\boxed{5}$ 新

平面 $x-\sqrt{3}y+z=1$ は z 軸上の点 $(0,0,1)$ を通り、xy 平面上の直線 $x-\sqrt{3}y=1$ において xy 平面と交差する。

直線 $x-\sqrt{3}y=1$ と原点までの距離は $\dfrac{|0-\sqrt{3}\cdot 0-1|}{\sqrt{1+3}}=\dfrac{1}{2}$。したがって、平面 $x-\sqrt{3}y+z=1$ を z 軸中心に回転し、

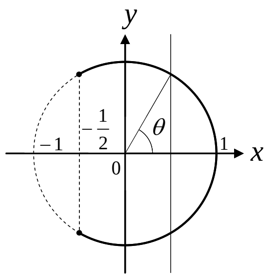
xy 平面上の直線 $x=-\dfrac{1}{2}$ において xy 平面と交差するようにしても、

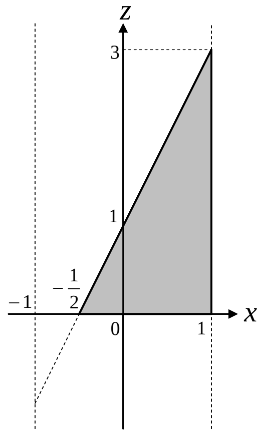
D の形状は変わらない。

このとき、D を xy 平面、xz 平面に図示すると右図の通り。

$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ の範囲で $0\leqq z\leqq 2x+1$ であり、

$x=\cos\theta$ とおくと $-\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ で、$0\leqq z\leqq 2\cos\theta+1$

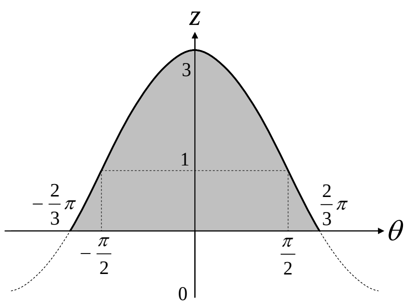




横軸に θ、縦軸に z をとって D の展開図を描くと右図の通りで、

D の面積は

$$S=2\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(2\cos\theta+1)\,d\theta=2\Big[2\sin\theta+\theta\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}=2\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi \quad\cdots\cdots(答)$$



1976年東大理$\boxed{5}$旧

$S=\int_0^x \frac{u^2+1}{u+1}du$ であるから　$\frac{dS}{dt}=\frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{x^2+1}{x+1}\cdot\frac{dx}{dt}=x^2+1$

$x^2+1\neq 0$ より　$\frac{1}{x+1}\cdot\frac{dx}{dt}=1$　$\frac{1}{x+1}dx=dt$　$\log(x+1)=t+C$　$x+1=e^{t+C}$

e^C を C で置き換えて　$x+1=Ce^t$　$x=Ce^t-1$

$t=0$ のとき $x=0$ であるから　$0=C-1$　$C=1$　$\therefore x=e^t-1$ ――①

一方、$S=\int_0^x\left(u-1+\frac{2}{u+1}\right)du=\left[\frac{1}{2}u^2-u+2\log(u+1)\right]_0^x=\frac{1}{2}x^2-x+2\log(x+1)$

①を代入すると

$$\therefore S=\frac{1}{2}(e^t-1)^2-(e^t-1)+2\log e^t=\frac{1}{2}e^{2t}-2e^t+2t+\frac{3}{2}$$ ……（答）