1976 年東大理$\boxed{3}$新文$\boxed{3}$新共通

$P(5+r\cos\theta, 5+r\sin\theta)$、$Q(a,b)$ とおくと、PQ の中点が $A(9,0)$ であるから、

$$\frac{5+r\cos\theta+a}{2}=9, 5+r\sin\theta+b=0 \quad \therefore a=13-r\cos\theta, b=-5-r\sin\theta$$

また、$R(c,d)$ とすると、$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5+r\cos\theta \\ 5+r\sin\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5-r\sin\theta \\ 5+r\cos\theta \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} QR^2 &= (13-r\cos\theta+5+r\sin\theta)^2+(5+r\sin\theta+5+r\cos\theta)^2 \\ &=\{18+r(\sin\theta-\cos\theta)\}^2+\{10+r(\sin\theta+\cos\theta)\}^2 \\ &=324+36r(\sin\theta-\cos\theta)+r^2(1-2\sin\theta\cos\theta)+100+20r(\sin\theta+\cos\theta)+r^2(1+2\sin\theta\cos\theta) \\ &=424+2r^2+r(56\sin\theta-16\cos\theta)=424+2r^2+8r(7\sin\theta-2\cos\theta) \end{aligned}$$

ここで、

$$7\sin\theta-2\cos\theta=\sqrt{53}\left(\frac{7}{\sqrt{53}}\sin\theta-\frac{2}{\sqrt{53}}\cos\theta\right)=\sqrt{53}\sin(\theta-\alpha) \quad \left(\tan\alpha=\frac{2}{7}\right)$$

より、

$$\therefore -\sqrt{53} \leqq 7\sin\theta-2\cos\theta \leqq \sqrt{53}$$

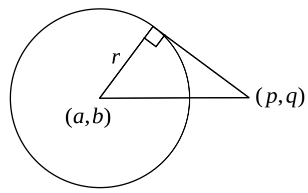
したがって、

$$f(r)=\sqrt{2r^2-8\sqrt{53}r+424}=\sqrt{2(r-2\sqrt{53})^2}=\sqrt{2}\left|r-2\sqrt{53}\right| \quad \cdots\cdots(答)$$

$$g(r)=\sqrt{2r^2+8\sqrt{53}r+424}=\sqrt{2(r+2\sqrt{53})^2}=\sqrt{2}(r+2\sqrt{53}) \quad \cdots\cdots(答)$$

$f(r)=0$ となるのは、$\therefore r=2\sqrt{53}$ ……(答)

1976年東大理$\boxed{3}$旧文$\boxed{3}$旧共通



円$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$の外部の点(p,q)から円に接線を引いたとき、

(p,q)から接点までの距離は$\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2-r^2}$である。

今、$P(p,q)$は円A,B,Cの外部にあるとして、

$$\alpha(p)^2=p^2+q^2-9, \beta(p)^2=(p-4)^2+(q-3)^2-4, \gamma(p)^2=(p-5)^2+(q+3)^2-1$$

$$\begin{aligned}\alpha(p)^2+\beta(p)^2+\gamma(p)^2&=p^2+q^2-9+(p-4)^2+(q-3)^2-4+(p-5)^2+(q+3)^2-1\\&=p^2+q^2-9+p^2-8p+q^2-6q+21+p^2-10p+q^2+6q+33\\&=3p^2-18p+3q^2+45=99\end{aligned}$$

$$p^2-6p+q^2-18=0 \quad \therefore (p-3)^2+q^2=27$$

したがって、Pは円$(x-3)^2+y^2=27$上にある。これをDとし、A,B,Cとの位置関係を調べる。

Dの中心$(3,0)$は、A上にある。DとAの交点は、$x^2-6x+y^2=18$から$x^2+y^2=9$を辺々引いて、

$$-6x=9 \quad \therefore x=-\frac{3}{2} \quad y^2=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4} \quad \therefore y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Dの中心$(3,0)$とBの中心$(4,3)$の距離は$\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$であり、Dの半径は$3\sqrt{3}$、Bの半径は2であるから、

$$(3\sqrt{3}-2)^2-(\sqrt{10})^2=3(7-4\sqrt{3})=3\cdot\frac{49-48}{7+4\sqrt{3}}=\frac{3}{7+4\sqrt{3}}>0 \text{より} \quad \therefore \sqrt{10}<3\sqrt{3}-2$$

したがって、BはDの内部に含まれ、Dと交差しない。

Dの中心$(3,0)$とCの中心$(5,-3)$の距離は$\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$であり、Dの半径は$3\sqrt{3}$、Cの半径は1であるから、

$$(3\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{13})^2=3(5-2\sqrt{3})=3\cdot\frac{25-12}{5+2\sqrt{3}}=\frac{39}{5+2\sqrt{3}}>0 \text{より} \quad \therefore \sqrt{13}<3\sqrt{3}-1$$

したがって、CはDの内部に含まれ、Dと交差しない。

Pの存在範囲は図の実線部で、円周の$\frac{5}{6}$であるから、

$$\therefore 2\cdot\pi\cdot 3\sqrt{3}\times\frac{5}{6}=5\sqrt{3}\pi \quad \cdots\cdots(\text{答})$$