1977 年東大理 $\boxed{5}$ 新文 $\boxed{2}$ 新共通

$$A(I-tJ)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\ -t & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-bt & at+b\\ c-dt & ct+d\end{pmatrix}=I+tJ=\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}$$ より、

$$\begin{cases}a-bt=1\\ at+b=-t\\ c-dt=t\\ ct+d=1\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}a=bt+1 & \text{——①}\\ b=-(a+1)t & \text{——②}\\ c=(d+1)t & \text{——③}\\ d=-ct+1 & \text{——④}\end{cases}$$

①、②より

$$a=-(a+1)t^2+1\quad (1+t^2)a=1-t^2\quad \therefore a=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad a+1=\frac{2}{1+t^2}\quad \therefore b=-\frac{2t}{1+t^2}$$

③、④より

$$d=-(d+1)t^2+1\quad (1+t^2)d=1-t^2\quad \therefore d=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad d+1=\frac{2}{1+t^2}\quad \therefore c=\frac{2t}{1+t^2}$$

以上により

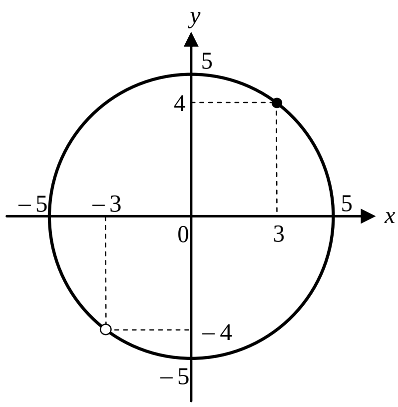
$$\therefore a=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ b=-\frac{2t}{1+t^2},\ c=\frac{2t}{1+t^2},\ d=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

次に、$t=\tan\dfrac{\theta}{2}\ (-\pi<\theta<\pi)$ とおくと、

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{\cos\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right)}{1}=\cos\theta\quad \frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{\sin\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right)}{1}=\sin\theta$$

したがって、$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ と書けて、これは原点中心に θ 回転させる行列を表す。

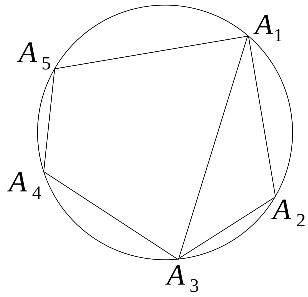
$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ が描く図形は、点 $\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$ を原点中心に回転させた軌跡であるが、$-\pi<\theta<\pi$ であるから、点 $\begin{pmatrix}-3\\ -4\end{pmatrix}$ には達しない。求める図形は、円 $x^2+y^2=25$ から点 $\begin{pmatrix}-3\\ -4\end{pmatrix}$ を除いた部分である。……(答)



1977 年東大理 $\boxed{5}$ 旧文 $\boxed{2}$ 旧共通

凸五角形は 3 つの三角形に分割できる。三角形の内角の和は π であるから、凸五角形の内角の和は 3π 。

$$\therefore \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 3\pi$$



次に、円に内接する凸五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ に対角線 A_1A_3 を引くと、
$\angle A_3A_1A_5 < \theta_1, \angle A_1A_3A_4 < \theta_3$ であり、
円に内接する四角形の対角の和は π であるから、

$$\pi = \theta_4 + \angle A_3A_1A_5 < \theta_4 + \theta_1, \pi = \theta_5 + \angle A_1A_3A_4 < \theta_5 + \theta_3$$

$$\therefore \theta_1 + \theta_4 > \pi, \theta_3 + \theta_5 > \pi$$

同様に、 $\theta_1 + \theta_3 > \pi, \theta_2 + \theta_4 > \pi, \theta_2 + \theta_5 > \pi$ も示される。

したがって、凸五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ が円に内接しているとき、

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 3\pi, \theta_1 + \theta_3 > \pi, \theta_2 + \theta_4 > \pi, \theta_3 + \theta_5 > \pi, \theta_1 + \theta_4 > \pi, \theta_2 + \theta_5 > \pi$$

が同時に成り立つことが必要である。

逆に、 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 3\pi, \theta_1 + \theta_3 > \pi, \theta_2 + \theta_4 > \pi, \theta_3 + \theta_5 > \pi, \theta_1 + \theta_4 > \pi, \theta_2 + \theta_5 > \pi$ が同時に成り立つとき、

$$\theta_1 + \theta_3 = 3\pi - (\theta_2 + \theta_4 + \theta_5) > \pi \quad \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 < 2\pi$$

$\theta_2 + \theta_4 > \pi, \theta_2 + \theta_5 > \pi$ により、

$$\pi + \theta_5 < (\theta_2 + \theta_4) + \theta_5 < 2\pi \quad \therefore \theta_5 < \pi \qquad \pi + \theta_4 < (\theta_2 + \theta_5) + \theta_4 < 2\pi \quad \therefore \theta_4 < \pi$$

同様に、 $\theta_1 < \pi, \theta_2 < \pi, \theta_3 < \pi$ も示される。

したがって、すべての内角が π より小さいので、五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ は凸五角形である。
凸五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ において、 $\theta_1 + \theta_3 > \pi, \theta_2 + \theta_4 > \pi, \theta_3 + \theta_5 > \pi, \theta_1 + \theta_4 > \pi, \theta_2 + \theta_5 > \pi$ が同時に成り立つとき、円に内接するような $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ が存在することは明らかである。

以上により示された。（証明終）