1977 年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

$g(x)=x^3-3kx$ とすると　$g'(x)=3x^2-3k$

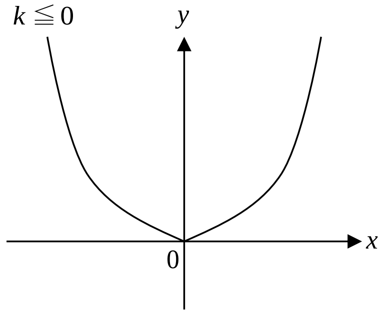
$k \leqq 0$ のとき　$g'(x) \geqq 0$ であるから、$g(x)$ は単調増加。

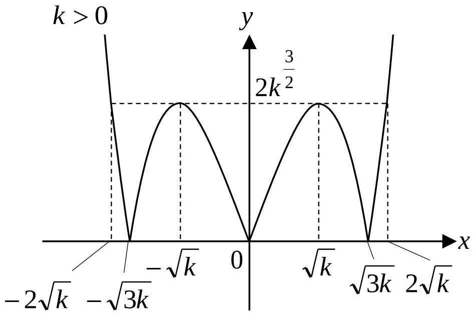
$k>0$ のとき　$g'(x)=3(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})$　増減は右の通り。

$x=-\sqrt{k}$ のとき極大値 $2k^{\frac{3}{2}}$、$x=\sqrt{k}$ のとき極小値 $-2k^{\frac{3}{2}}$ をとる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{k}$	$\cdots$	$\sqrt{k}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗		↘		↗

$y=f(x)=\lvert g(x)\rvert$ のグラフは、右図のようになる。





$k \leqq 0$ のとき　$M(k)=f(\pm 1)=\lvert 1-3k\rvert$　$1-3k>0$ であるから　$\therefore M(k)=-3k+1$

$1 \leqq \sqrt{k}$　$1 \leqq k$ のとき　$M(k)=f(\pm 1)=\lvert 1-3k\rvert$　$1-3k<0$ であるから　$\therefore M(k)=3k-1$

$\sqrt{k}<1 \leqq 2\sqrt{k}$　$\frac{1}{4} \leqq k<1$ のとき　$M(k)=f(\pm\sqrt{k})=2k^{\frac{3}{2}}$

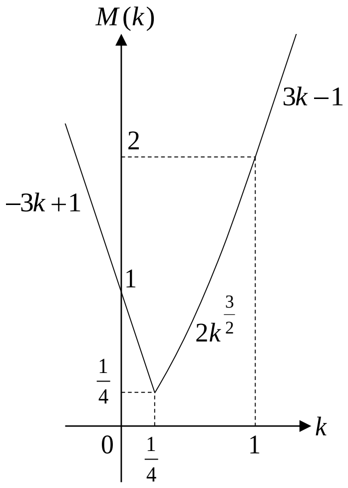
$2\sqrt{k}<1$　$0<k<\frac{1}{4}$ のとき　$M(k)=f(\pm 1)=\lvert 1-3k\rvert$　$1-3k>0$ であるから　$\therefore M(k)=-3k+1$

以上まとめて

$k<\frac{1}{4}$ のとき　$M(k)=-3k+1$

$\frac{1}{4} \leqq k<1$ のとき　$M(k)=2k^{\frac{3}{2}}$

$1 \leqq k$ のとき　$M(k)=3k-1$



グラフより、$k=\frac{1}{4}$ のとき、最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。……(答)