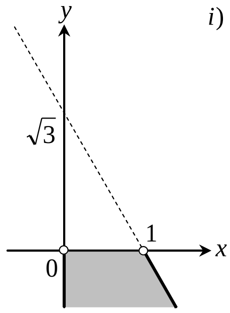
1977 年東大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

点Pを中心とした円のうち、領域A,B,Cに含まれるものの半径の最大値を、それぞれ$r_A(p),r_B(p),r_C(p)$と書くことにする。$r_A(p),r_B(p),r_C(p)$のうち最大のものが$r(p)$である。



(1)

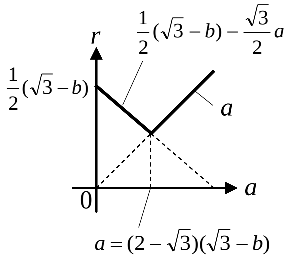
$A\cap C$から$(A\cap C)\cap B$を除いた領域は左図 i)の通り。

境界線はy軸および直線$\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}$の$y<0$の部分のみ含む。

この領域内でPを動かすとき、Pを中心とした円が領域Bに含まれることはないから、

$r_A(p)$と$r_C(p)$について考える。

$P(a,b)$とし、bを固定して考える。$b<0,0\leqq a\leqq 1-\dfrac{b}{\sqrt{3}}$であり、



$$r_A(P)=a \quad r_B(P)=\frac{\left|\sqrt{3}a+b-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{3}a-b)(\because \sqrt{3}a+b\leqq\sqrt{3})$$

横軸にaをとって比較すると、$r(p)$が最小となるのは$r_A(p)=r_C(p)$となるときで、

このときPを中心とした円はy軸および直線$\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}$の両方に接している。

$$a=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-b)-\frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ より} \quad (2+\sqrt{3})a=\sqrt{3}-b \quad a=\frac{\sqrt{3}-b}{2+\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-b)$$

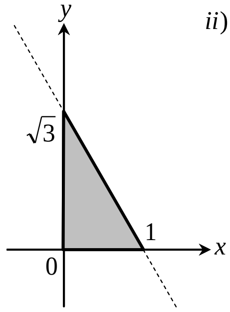
bを固定したときの$r(p)$の最小値は$(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-b)$で、$b<0$より

$$(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-b)>(2-\sqrt{3})\sqrt{3}=-3+2\sqrt{3}$$

$b\to-\infty$とすれば、$r(p)$に上限がないことは明らかであるから、$\therefore r(p)>-3+2\sqrt{3}$ ……(答)

(2)

i)　Pが$A\cap C$から$(A\cap C)\cap B$を除いた領域を動くとき、(1)より$r(p)>-3+2\sqrt{3}$ ——①



ii)　Pが$(A\cap C)\cap B$を動くとき

領域は左図 ii)の通りで、境界線を含む。

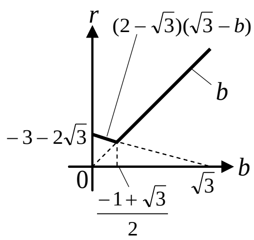
(1)と同様に、$P(a,b)$とし、bを固定して考える。$0\leqq b\leqq\sqrt{3},0\leqq a\leqq 1-\dfrac{b}{\sqrt{3}}$であり、

$r_A(p),r_C(p)$は$r_A(p)=r_C(p)=(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-b)$のとき最小となる。

これと$r_B(p)=b$の大小を、bを動かして比較すると、

$r(p)$が最小となるのは$r_A(p)=r_B(p)=r_C(p)$のときで、このときP　を中心とした円は

x軸、y軸、直線$\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}$のすべてに接している。



$$b=(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-b) \text{ より} \quad (3-\sqrt{3})b=2\sqrt{3}-3 \quad b=\frac{2\sqrt{3}-3}{3-\sqrt{3}}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

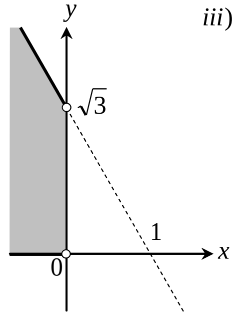
$r(p)\leqq\sqrt{3}$は明らかで、$\therefore \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\leqq r(p)\leqq\sqrt{3}$ ——②

iii)　P が $B \cap C$ から $(A \cap C) \cap B$ を除いた領域を動くとき

領域は左図 iii)の通りで、境界線は x 軸および直線 $\sqrt{3}x + y = \sqrt{3}$ の $x < 0$ の部分のみ含む。

(1)と同様の議論により、 $P(a,b)$ とし、 $a < 0, 0 \leqq b \leqq \sqrt{3}(1-a)$ として、 a を固定して考える。

$r_B(p) = r_C(p)$ となる b を求めると、



$$b = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{3}a - b) \quad 3b = \sqrt{3}(1-a) \quad b = \frac{1-a}{\sqrt{3}}$$

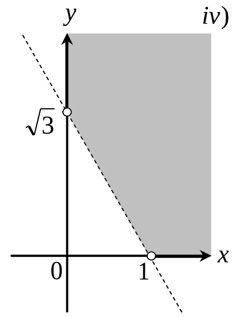
a を固定したときの $r(p)$ の最小値は $\dfrac{1-a}{\sqrt{3}}$ で、$a < 0$ より　$\dfrac{1-a}{\sqrt{3}} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$a \to -\infty$ とすれば、$r(p)$ に上限がないことは明らかであるから、$\therefore r(p) > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ――③

iv)　P が $A \cap B$ から $(A \cap C) \cap B$ を除いた領域を動くとき

領域は左図 iv)の通りで、境界線は x 軸の $x > 1$ の部分および y 軸の $y > \sqrt{3}$ の部分のみ含む。

(1)と同様の議論により、$r_A(p) = r_B(p)$ となる P を考えると、第 1 象限で x 軸および y 軸に接するから、 $a > 0$ として $P(a,a)$ とおけて、 C に属さないことから $\sqrt{3}x + y > \sqrt{3}$ に代入すると



$$\sqrt{3}a + a > \sqrt{3} \quad a > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

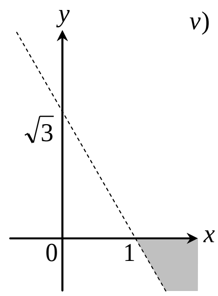
$a \to \infty$ とすれば、$r(p)$ に上限がないことは明らかであるから、$\therefore r(p) > \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ ――④

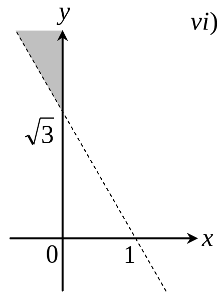
v)　P が A のみに属するとき

領域は左図 v)の通りで、境界線を含まない。

$r(p)$ に上限はなく、P を $(1,0)$ に近づければ　$r_A(p) > 1$

　$\therefore r(p) > 1$ ――⑤





vi)　P が B のみに属するとき

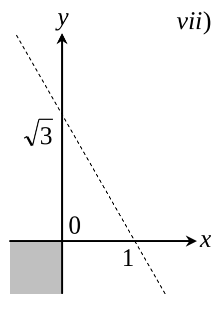
領域は左図 vi)の通りで、境界線を含まない。

$r(p)$ に上限はなく、P を $(0,\sqrt{3})$ に近づければ　$r_B(p) > \sqrt{3}$

　$\therefore r(p) > \sqrt{3}$ ――⑥

vii)　P が C のみに属するとき

領域は左図 vii)の通りで、境界線を含まない。



$r(p)$ に上限はなく、P を $(0,0)$ に近づければ　$r_C(p) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

　$\therefore r(p) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ――⑦

以上①～⑦により、結局　$\therefore r(p) \geqq \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ……(答)