1978 年東大文 $\boxed{4}$

曲線(1)上の点 $(t,\ t^3-5t^2+t+9)$ における接線は

$$y=(3t^2-10t+1)(x-t)+t^3-5t^2+t+9=(3t^2-10t+1)x-2t^3+5t^2+9$$

これが $(-3,\ 6)$ を通るとき

$$6=-3(3t^2-10t+1)-2t^3+5t^2+9 \qquad 2t^3+4t^2-30t=0 \qquad t^3+2t^2-15t=0 \qquad t(t+5)(t-3)=0$$

$t \geqq 0$ となるのは $t=0,\ 3$ である。$t=0$ のとき、接線は $y=x+9$。$t=3$ のとき、接線は $y=-2x$。

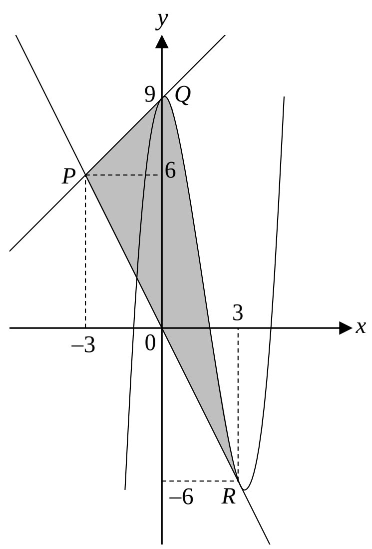
$$\frac{dy}{dx}=3x^2-10x+1=3\left(x-\frac{5-\sqrt{22}}{3}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{22}}{3}\right)$$ より、

曲線(1)の増減は右の通り。

x	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{22}}{3}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{22}}{3}$	$\cdots$
$\frac{dy}{dx}$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗

$0<\frac{5-\sqrt{22}}{3}<\frac{1}{3},\ 3<\frac{5+\sqrt{22}}{3}<3+\frac{1}{3}$ より、線分 $PQ,\ PR$ および

曲線(1)の Q から R の部分で囲まれた領域は、右図の網掛部である。



$x \leqq 0$ の部分は三角形であり、求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3+\int_0^3\left\{(x^3-5x^2+x+9)-(-2x)\right\}dx$$

$$=\frac{27}{2}+\int_0^3(x^3-5x^2+3x+9)dx=\frac{27}{2}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]_0^3$$

$$=\frac{27}{2}+\frac{81}{4}-45+\frac{27}{2}+27=\frac{117}{4}$$ ……(答)