1978 年東大理 $\boxed{3}$

(1)

C 上の点 $Q\left(t,\ \frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}\right)$ における接線の傾きは、$3t$ である。

$t \neq 0$ のとき　Q における法線の式は

$$y=-\frac{1}{3t}(x-t)+\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3t}x+\frac{3}{2}t^2 \qquad \frac{3}{2}t^2-y-\frac{1}{3t}x=0 \qquad \therefore 9t^3-6yt-2x=0 \text{ ——①}$$

①を t についての 3 次方程式と見て、ただ 1 つの実数解を持つ条件を考える。

$f(t)=9t^3-6yt-2x$ とすると　$f'(t)=27t^2-6y$

$y \leqq 0$ のとき　$f'(t)>0$ よりは単調増加で、①はただ 1 つの実数解を持つ。

$y>0$ のとき　$f'(t)=27\left(t+\frac{\sqrt{2y}}{3}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2y}}{3}\right)$　①がただ 1 つの実数解を持つ条件は、増減表より

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2y}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2y}}{3}$	$\cdots$
$f'(t)$	＋	0	－	0	＋
$f(t)$	↗		↘		↗

$$f\left(-\frac{\sqrt{2y}}{3}\right)\cdot f\left(\frac{\sqrt{2y}}{3}\right)>0$$

$$\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}}-2x\right)\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}}-2x\right)>0$$

$$-\frac{32}{9}y^3+4x^2>0 \qquad y^3<\frac{9}{8}x^2 \qquad \therefore y<\frac{\sqrt[3]{9}}{2}|x|^{\frac{2}{3}}$$　ただし、$f(0)\neq 0$ より $x \neq 0$

$t=0$ のとき

Q における法線の式は $x=0$ であり、y 軸上の任意の点は、C の法線 $x=0$ を通る。

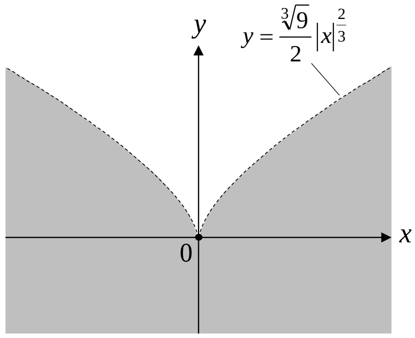
上記の議論より、$t \neq 0$ のとき、点 $\left(0,\ \frac{3}{2}t^2\right)$ を通る C の法線 $y=-\frac{1}{3t}x+\frac{3}{2}t^2$ を引ける。

したがって、y 軸上の点を通る C の法線が 1 本だけ引ける条件は　$\therefore y \leqq 0$

以上をまとめると、$P(x,\ y)$ の存在範囲は

$x \neq 0$ のとき　$y<\frac{\sqrt[3]{9}}{2}|x|^{\frac{2}{3}}$

$x=0$ のとき　$y \leqq 0$



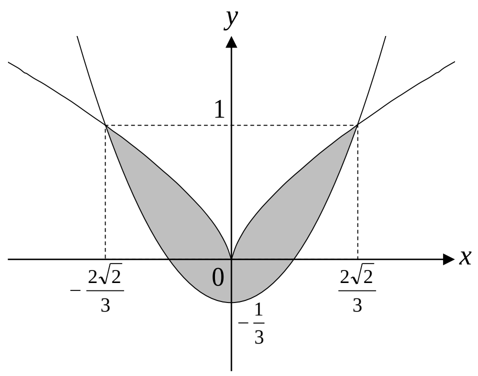
図示すると右図の通り。境界は点 $(0,\ 0)$ のみ含む。

(2)

$y=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}$ と $y=\dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}|x|^{\frac{2}{3}}$ の交点を求める。 $x^2=\dfrac{8}{9}y^3$ より

$$y=\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9}y^3-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{3} \quad 4y^3-3y-1=0 \quad (y-1)(2y+1)^2=0$$

$y>0$ より $\quad \therefore y=1 \quad x^2=\dfrac{8}{9} \quad \therefore x=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



対称性より、求める面積は

$$2\int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\left\{\frac{\sqrt[3]{9}}{2}x^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}\right)\right\}dx=2\left[\frac{3^{\frac{5}{3}}}{10}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x\right]_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2\left(\frac{2^{\frac{5}{2}}}{10}-\frac{1}{2}\cdot\frac{16\sqrt{2}}{27}+\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{16\sqrt{2}}{27}+\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{88\sqrt{2}}{135} \quad \cdots\cdots(答)$$