1978 年東大理 $\boxed{4}$

$A^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{50}{3}\\ 0 & 9\end{pmatrix}$、$A^3=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{50}{3}\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{27} & \frac{455}{9}\\ 0 & 27\end{pmatrix}$ より、$A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^n} & q_n\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$ と予想できる。

$n=1,\ 2,\ 3$ のとき成立。

$n=k$ のとき、$A^k=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^k} & q_k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$ と仮定すると　$A^{k+1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^k} & q_k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^{k+1}} & 3q_k+\frac{5}{3^k}\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}$

したがって、$q_{k+1}=3q_k+\frac{5}{3^k}$ とすれば、$n=k+1$ のときも成立。q_n を求める。

$$q_{n+1}=3q_n+\frac{5}{3^n}\qquad 3^n q_{n+1}=3^{n+1}q_n+5=9\cdot 3^{n-1}q_n+5\qquad 3^n q_{n+1}+\frac{5}{8}=9\left(3^{n-1}q_n+\frac{5}{8}\right)$$

$$3^{n-1}q_n+\frac{5}{8}=9^{n-1}\left(q_1+\frac{5}{8}\right)=\frac{45}{8}\cdot 9^{n-1}=\frac{5}{8}\cdot 9^n\qquad 3^{n-1}q_n=\frac{5}{8}(9^n-1)\qquad \therefore q_n=\frac{15}{8}\left(3^n-\frac{1}{3^n}\right)$$

以上により　$\therefore A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^n} & \frac{15}{8}\left(3^n-\frac{1}{3^n}\right)\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$ ……(答)

次に、$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ より　$a_n=\frac{a}{3^n}+\frac{15}{8}\left(3^n-\frac{1}{3^n}\right)b=3^n\left\{\frac{15}{8}b+\left(a-\frac{15}{8}b\right)\frac{1}{3^{2n}}\right\}$　$b_n=3^n b$

$$\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}=3^n\sqrt{\left\{\frac{15}{8}b+\left(a-\frac{15}{8}b\right)\frac{1}{3^{2n}}\right\}^2+b^2}$$

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}}=\frac{\frac{15}{8}b+\left(a-\frac{15}{8}b\right)\frac{1}{3^{2n}}}{\sqrt{\left\{\frac{15}{8}b+\left(a-\frac{15}{8}b\right)\frac{1}{3^{2n}}\right\}^2+b^2}}\qquad \frac{b_n}{\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}}=\frac{b}{\sqrt{\left\{\frac{15}{8}b+\left(a-\frac{15}{8}b\right)\frac{1}{3^{2n}}\right\}^2+b^2}}$$

$b=0$ のとき　$\frac{a_n}{\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}}=\frac{\frac{a}{3^{2n}}}{\sqrt{\frac{a^2}{3^{4n}}}}=\frac{a}{|a|}$　$\frac{b_n}{\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}}=0$

$b\neq 0$ のとき　$u=\frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2+1}}\frac{b}{|b|}=\frac{15}{\sqrt{225+64}}\frac{b}{|b|}=\frac{15}{17}\frac{b}{|b|}$　$v=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2+1}}\frac{b}{|b|}=\frac{8}{17}\frac{b}{|b|}$

以上まとめると

$a>0,\ b=0$ のとき　$u=1,\ v=0$　$a<0,\ b=0$ のとき　$u=-1,\ v=0$

$b>0$ のとき　$u=\frac{15}{17},\ v=\frac{8}{17}$　$b<0$ のとき　$u=-\frac{15}{17},\ v=-\frac{8}{17}$　……(答)