1978年東大理 5

$\angle ABC=\theta$ とすると　$\cos\theta=\dfrac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$BP_k=\dfrac{a}{n}k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるから

$$AP_k{}^2=AB^2+BP_k{}^2-2AB\cdot BP_k\cos\theta=c^2+a^2\left(\frac{k}{n}\right)^2-2ca\frac{k}{n}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=c^2-(c^2+a^2-b^2)\frac{k}{n}+a^2\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$\frac{1}{n}(AP_1{}^2+AP_2{}^2+\cdots+AP_n{}^2)=c^2-(c^2+a^2-b^2)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}+a^2\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(AP_1{}^2+AP_2{}^2+\cdots+AP_n{}^2)=c^2-(c^2+a^2-b^2)\int_0^1 xdx+a^2\int_0^1 x^2dx$$

$$=c^2-(c^2+a^2-b^2)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+a^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=c^2-\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{3}a^2$$

$$=-\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2\quad\cdots\cdots(\text{答})$$