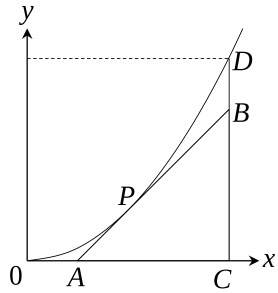
1978 年東大理 $\boxed{6}$




(1)

$P(t,\ t^2)\ (0<t<1)$ としたとき、$P$ における $L$ の接線は

$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2=t(2x-t)$　したがって　$A\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right),\ B(1,\ 2t-t^2)$

$\triangle PAC$ の面積は　$AC=1-\dfrac{t}{2}$ より　$\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-\dfrac{t}{2}\right)\cdot t^2=\dfrac{1}{4}t^2(2-t)$

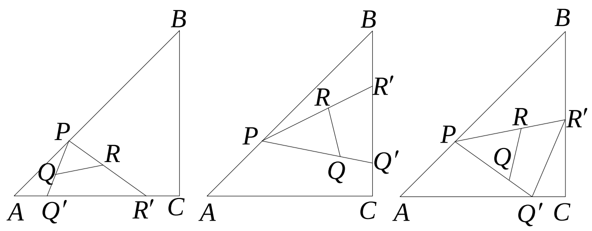
$\triangle PBC$ の面積は　$P$ と直線 $x=1$ の距離が $1-t$ であるから　$\dfrac{1}{2}\cdot(2t-t^2)\cdot(1-t)=\dfrac{1}{2}t(1-t)(2-t)$

$g(x)=\dfrac{1}{4}x^2(2-x),\ h(x)=\dfrac{1}{2}x(1-x)(2-x)$ より　$h(x)-g(x)=\dfrac{1}{4}x(2-x)\{2(1-x)-x\}=\dfrac{1}{4}x(2-x)(2-3x)$

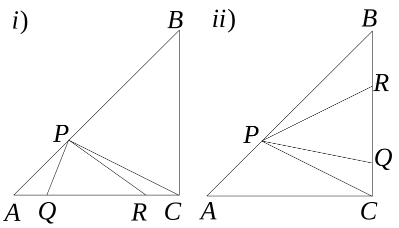
$x>0,\ 2-x>0$ であるから、$h(x)-g(x)\geqq 0$ となる条件は　$2-3x\geqq 0$　$\therefore 0<x\leqq\dfrac{2}{3}$　……(答)

(2)

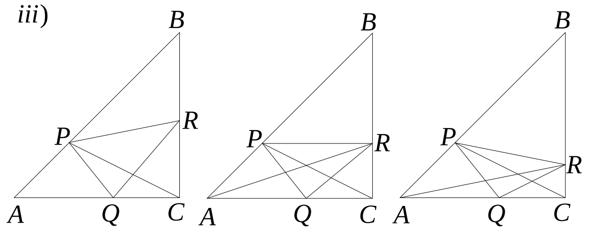
$P$ 以外の 2 頂点を $Q,\ R$ とする。$\triangle PQR$ が $M$ に含まれるためには、$Q,\ R$ は $\triangle ABC$（周を含む）に含まれる必要がある。例えば、$R$ が線分 $PB$ を除く領域 $PBD$ 内にあるとき、線分 $PR$ と $L$ の一部 $PD$ は交差するからである。$Q,\ R$ が周を除く $\triangle ABC$ の内部にあるとき、$PQ,\ PR$ の延長が $AB$ または $BC$ と交差する点を、それぞれ $Q',\ R'$ とする。また、例えば $\triangle PQR$ の面積を $(\triangle PQR)$ と表すことにする。




このとき、右図より、$(\triangle PQR)<(\triangle PQ'R')$ は明らかである。
したがって、$Q,\ R$ は $AC$ 上または $BC$ 上にあると考えてよい。
点 $A,\ B,\ C$ も含む。




i）$Q,\ R$ がともに $AC$ 上にあるとき　$(\triangle PQR)<(\triangle PAC)$ は明らかである。
ii）$Q,\ R$ がともに $BC$ 上にあるとき　$(\triangle PQR)<(\triangle PBC)$ は明らかである。




iii）$Q$ が $AC$ 上、$R$ が $BC$ 上にあるときにあるとき

$PR$ の傾きが正ならば　$(\triangle PQR)<(\triangle PCR)<(\triangle PBC)$

$PR$ の傾きが 0 ならば　$(\triangle PQR)=(\triangle PAR)=(\triangle PCR)$

$(\triangle PQR)=(\triangle PAR)<(\triangle PAC)$

$(\triangle PQR)=(\triangle PCR)<(\triangle PBC)$

$PR$ の傾きが負ならば　$(\triangle PQR)<(\triangle PAR)<(\triangle PAC)$

iv）　$Q$ が $BC$ 上、$R$ が $AC$ 上にあるときにあるとき　iii）と同様。

結局、$(\triangle PQR)$ の最大値は $(\triangle PAC)$ または $(\triangle PBC)$ であるから、$f(x)$ は(1)で求めた $g(x),\ h(x)$ のうちの大きい方である。

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x(1-x)(2-x) & \left(0<x\leqq\dfrac{2}{3}\right)\\[2mm] \dfrac{1}{4}x^2(2-x) & \left(\dfrac{2}{3}\leqq x<1\right)\end{cases}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

$0<x\leqq\dfrac{2}{3}$ のとき　$f(x)=\dfrac{1}{2}(x^3-3x^2+2x)$　$f'(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-6x+2)=\dfrac{3}{2}\left\{x-\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}\left\{x-\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

$\dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\dfrac{2}{3}$ であるから　$\therefore \dfrac{1}{3}<1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{2}{3}\leqq x<1$ のとき　$f(x)=\dfrac{1}{4}(2x^2-x^3)$　$f'(x)=\dfrac{1}{4}(4x-3x^2)=\dfrac{3}{4}x\left(\dfrac{4}{3}-x\right)$

増減は右の通り。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $\dfrac{2}{3}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | ＋ | 0 | − | | ＋ | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

$$f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}\qquad f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}$$

$x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ において極大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$、$x=\dfrac{2}{3}$ において極小値 $\dfrac{4}{27}$ をとる。……(答)

$y=f(x)$ のグラフは下の通り。