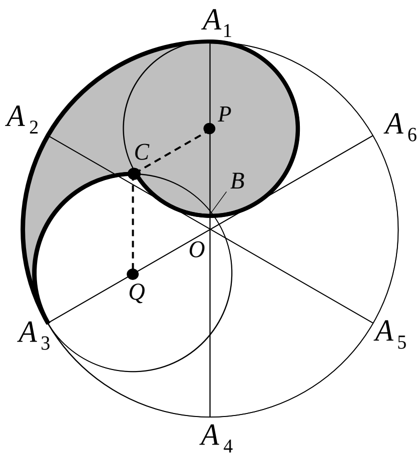
1978年東大理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{1}$ 共通

座標平面において、

$O(0,0),\ A_1(0,1),\ A_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right),\ A_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right),\ A_4(0,-1),\ A_5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right),\ A_6\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

とする。P は OA_1 上にあるから、$P(0,p)\ (0<p<1)$ とおく。



$PA_1=1-p$　　P と OA_6 の距離は、OA_6 の式が $x-\sqrt{3}y=0$ と表されるから、

$$\frac{\left|0-\sqrt{3}p\right|}{\sqrt{1+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}p=1-p \quad (2+\sqrt{3})p=2 \quad p=\frac{2}{2+\sqrt{3}}=2(2-\sqrt{3})$$

$PA_1=1-p=-3+2\sqrt{3}=r$ とおくと、$PA_1=PC=OQ=r$

$OP=QA_3=QC=1-r$ であるから、$\therefore PC=OQ, OP=QC$

したがって、四角形 $OPCQ$ は平行四辺形である。(証明終)

(1)より $PC\,/\!/\,OQ,\ OP\,/\!/\,QC$ であるから、$\angle A_1PC=\angle CQA_3=\dfrac{2}{3}\pi$

扇型 $A_1A_2A_3O,\ A_1CP,\ CA_3Q$ は相似であり、面積はそれぞれ $\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}r^2,\ \dfrac{\pi}{3}(1-r)^2$

平行四辺形 $OPCQ$ の面積は、$r(1-r)\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r(1-r)$

弧 $A_1A_2A_3,\ A_1C,\ CA_3$ で囲まれた領域の面積は $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}r^2-\dfrac{\pi}{3}(1-r)^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}r(1-r)$ であり、

これに円 P の面積 πr^2 を加えて、求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}r^2-\frac{\pi}{3}(1-r)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}r(1-r)+\pi r^2&=\frac{\pi}{3}(2r+r^2)-\frac{\sqrt{3}}{2}r(1-r)\\&=\frac{\pi}{3}(-6+4\sqrt{3}+21-12\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}(-3+2\sqrt{3}-21+12\sqrt{3})\\&=\pi\left(5-\frac{8}{3}\sqrt{3}\right)-21+12\sqrt{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$