1979 年東大理 $\boxed{3}$ 文 $\boxed{4}$ 共通

$k \geqq 1$ に対し、$u_k = 4q_k + r_k$ とおく。r_k は u_k を 4 で割った余りであり、$0, 1, 2, 3$ のいずれかである。
同様に、$a = 4q + r$ とおく。r は a を 4 で割った余りであり、$0, 1, 2, 3$ のいずれかである。
$n \geqq 3$ のとき

$$u_n = au_{n-2} - u_{n-1} = (4q+r)(4q_{n-2} + r_{n-2}) - (4q_{n-1} + r_{n-1}) = 4(4qq_{n-2} + qr_{n-2} + rq_{n-2} - q_{n-1}) + rr_{n-2} - r_{n-1}$$

したがって、u_n を 4 で割った余りは、$rr_{n-2} - r_{n-1}$ を 4 で割った余りに等しい。
$rr_{n-2} - r_{n-1}$ を 4 で割った余りを、r_n と定義する。数列 $\{r_n\}$ に 0 が現れないことが条件である。$r_1 = 2$。

$r = 0$ のとき　$u_2 = 16q^2 + 2$ より、$r_2 = 2$
$rr_1 - r_2 = -r_2 = -2 = 4 \times (-2) + 2$　$\therefore r_3 = 2$　常に $r_n = 2$ と予想できる。
$r_k = 2$ のとき　$-r_k = -2 = 4 \times (-2) + 2$　$\therefore r_{k+1} = 2$　したがって、$r_n = 2$ が示された。

$r = 1$ のとき　$u_2 = 16q^2 + 8q + 3$ より、$r_2 = 3$
$rr_1 - r_2 = r_1 - r_2 = -1 = 4 \times (-1) + 3$　$\therefore r_3 = 3$　$r_2 - r_3 = 0$　$\therefore r_4 = 0$
したがって、u_4 は必ず 4 の倍数になる。

$r = 2$ のとき　$u_2 = 4(2q+1)^2 + 2$ より、$r_2 = 2$
$rr_1 - r_2 = 2r_1 - r_2 = 2$　$\therefore r_3 = 2$　常に $r_n = 2$ と予想できる。
$r_k = 2,\ r_{k+1} = 2$ のとき　$2r_k - r_{k+1} = 2$　$\therefore r_{k+2} = 2$　したがって、$r_n = 2$ が示された。

$r = 3$ のとき　$u_2 = 16q^2 + 24q + 11 = 4(4q^2 + 6q + 2) + 3$ より、$r_2 = 3$
$rr_1 - r_2 = 3r_1 - r_2 = 3$　$\therefore r_3 = 3$　$3r_2 - r_3 = 6$　$\therefore r_4 = 2$　$3r_3 - r_4 = 7$　$\therefore r_5 = 3$
r_n は $2, 3, 3, 2, 3, 3, \cdots$ の繰り返しと予想できる。
$r_k = 2,\ r_{k+1} = 3$ のとき　$3r_k - r_{k+1} = 3$　$\therefore r_{k+2} = 3$
$r_k = 3,\ r_{k+1} = 3$ のとき　$3r_k - r_{k+1} = 6$　$\therefore r_{k+2} = 2$
$r_k = 3,\ r_{k+1} = 2$ のとき　$3r_k - r_{k+1} = 7$　$\therefore r_{k+2} = 3$
したがって、$k \geqq 1$ のとき $r_{3k-2} = 2,\ r_{3k-1} = r_{3k} = 3$ が示された。

以上により、数列 $\{u_n\}$ に 4 の倍数が現れるのは $r = 1$ のときのみであるから、求める必要十分条件は、
a を 4 で割った余りが 1 ではないことである。……(答)