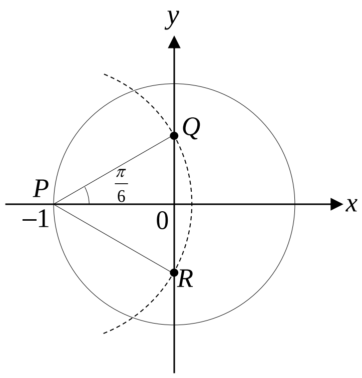
1979年東大理 $\boxed{4}$

図のように座標を取り、$P(-1,\ 0)$ とする。



$Q,\ R$ は円 $(x+1)^2+y^2=\dfrac{4}{3}$ 上にあるから、

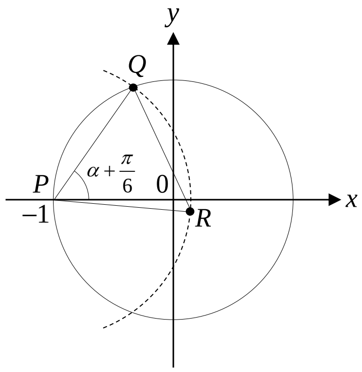
$Q\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-1,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\right),\ R\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)-1,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

とおける。

$x^2+y^2=1$ と $(x+1)^2+y^2=\dfrac{4}{3}$ の交点は $\left(-\dfrac{1}{3},\ \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ であるから、

Q が $x^2+y^2=1$ 上にあるとき　$\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

このときの θ を α とする。対称性より、$0\leqq\theta\leqq\alpha$ で考える。



$$OQ^2+OR^2=\frac{4}{3}+1-\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{4}{3}+1-\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{14}{3}-4\cos\theta$$

$0\leqq\theta\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから、最小値は $\theta=0$ のときで、$\dfrac{14}{3}-4=\dfrac{2}{3}$

最大値は $\theta=\alpha$ のとき。$\cos\alpha$ を求める。

$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ より、$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\alpha$ を消去すると　$(1+3)\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+2$　$\therefore\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{6}+\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{14}{3}-4\cos\alpha=\dfrac{14}{3}-4\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{8-2\sqrt{6}}{3}$

以上により、最大値は $\dfrac{8-2\sqrt{6}}{3}$、最小値は $\dfrac{2}{3}$　……(答)