1979年東大理 $\boxed{5}$

$y=f(x)$ が原点を通るので、 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ とすると　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$　$f''(x)=6ax+2b$

$f'(0)=0$ より　$\therefore c=0$　$f''(0)=2$ より　$2b=2$　$\therefore b=1$

$f(x)=ax^3+x^2$ であり、 $y=f(x)$ が $(-t,\ -t)$ を通るから　$-t=-at^3+t^2$　$at^2=t+1$　$\therefore a=\dfrac{t+1}{t^2}$

$\dfrac{t+1}{t^2}x^3+x^2=x$ とすると　$x\left\{(t+1)x^2+t^2x-t^2\right\}=0$　$x(x+t)\left\{(t+1)x-t\right\}=0$

Q の x 座標は $\dfrac{t}{t+1}$ であるから

$$S(t)=\int_0^{\frac{t}{t+1}}\left\{x-\left(\frac{t+1}{t^2}x^3+x^2\right)\right\}dx=\left[-\frac{t+1}{4t^2}x^4-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{t}{t+1}}=-\frac{t+1}{4t^2}\frac{t^4}{(t+1)^4}-\frac{t^3}{3(t+1)^3}+\frac{t^2}{2(t+1)^2}$$

$$=-\frac{t^2}{4(t+1)^3}-\frac{t^3}{3(t+1)^3}+\frac{t^2}{2(t+1)^2}=\frac{-3t^2-4t^3+6t^2(t+1)}{12(t+1)^3}=\frac{2t^3+3t^2}{12(t+1)^3}=\frac{2+\dfrac{3}{t}}{12\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^3}$$

したがって　$\therefore \lim_{t\to\infty}S(t)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$　……(答)