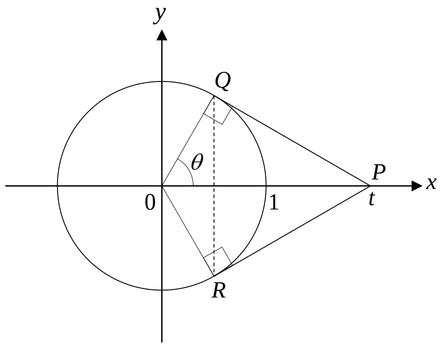
1979 年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

P および球の中心を含む断面を考える。
座標平面上で球の中心を O とし、$P(t,\,0)\ (t>0)$ とする。
P から引いた接線の接点を



$$Q(\cos\theta,\,\sin\theta),\ R(\cos\theta,\,-\sin\theta)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とすると、$t\cos\theta=1$ より　$t=\dfrac{1}{\cos\theta}$

三角形 PQR を x 軸中心に回転してできる円錐は、底面の半径が $\sin\theta$ である。

高さは $\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ であるから、体積は　$\dfrac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cdot\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\pi\sin^4\theta}{3\cos\theta}$

また、K の体積は　$\pi\displaystyle\int_{\cos\theta}^{1}(1-x^2)dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\cos\theta}^{1}=\pi\left(\frac{2}{3}-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)$

D の体積は、円錐の体積から K の体積を引いたものであり、これが球の体積の半分に等しいから

$$\frac{\pi\sin^4\theta}{3\cos\theta}-\pi\left(\frac{2}{3}-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sin^4\theta}{\cos\theta}-2+3\cos\theta-\cos^3\theta\right)=\frac{2}{3}\pi$$

$$\frac{\sin^4\theta}{\cos\theta}-2+3\cos\theta-\cos^3\theta-2=0\qquad \sin^4\theta-\cos^4\theta+3\cos^2\theta-4\cos\theta=0$$

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+3\cos^2\theta-4\cos\theta=0\qquad 1-2\cos^2\theta+3\cos^2\theta-4\cos\theta=0$$

$$\therefore \cos^2\theta-4\cos\theta+1=0$$

$0<\cos\theta<1$ より　$\therefore\cos\theta=2-\sqrt{3}$
このとき、K の体積は

$$\pi\left\{\frac{2}{3}-\cos\theta\left(1-\frac{1}{3}\cos^2\theta\right)\right\}=\pi\left\{\frac{2}{3}-(2-\sqrt{3})\left(1-\frac{7-4\sqrt{3}}{3}\right)\right\}=\pi\left\{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}(2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{22}{3}-4\sqrt{3}\right)\ \cdots\cdots(答)$$