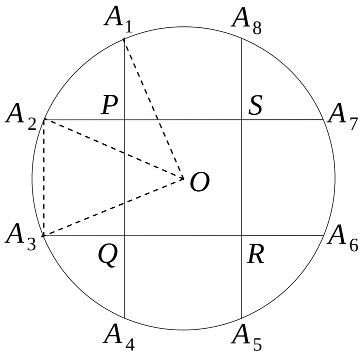
1980 年東大文 $\boxed{1}$



図中の辺 PQ の長さは線分 A_2A_3 の長さに等しい。正方形 $PQRS$ の面積は、余弦定理より

$$A_2A_3{}^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = (2-\sqrt{2})a^2 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

また、 $A_2A_3 = A_1A_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,a \quad A_1P = A_2P = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}a$ より、

直角二等辺三角形 A_1A_2P の面積は $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}a^2$

弧 A_1A_2 と線分 A_1A_2 で囲まれた部分の面積は $\dfrac{1}{2}a^2 \cdot \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}a^2 \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} = \left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)a^2$

線分 A_1P, A_2P と弧 A_1A_2 で囲まれた部分の面積は $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}a^2 + \left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)a^2 = \dfrac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{8}a^2 \quad \cdots\cdots(\text{答})$