1980年東大文$\boxed{3}$

$a^2+b^2+c^2+d^2=n^2-6$ ——①
$a+b+c+d \leqq n$ ——②
$a \geqq b \geqq c \geqq d$ ——③

①、②より
$a^2+b^2+c^2+d^2=(a+b+c+d)^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=n^2-6$
$\leqq n^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$
$\therefore 3 \geqq ab+ac+ad+bc+bd+cd$ ——④

③、④より $3 \geqq 6d^2$　$d^2 \leqq \dfrac{1}{2}$　$d=0$ しかあり得ない。

$d=0$ のとき、④より $3 \geqq ab+ac+bc$ ——⑤　③、⑤より $3 \geqq 3c^2$　$c^2 \leqq 1$　$\therefore c=0,1$

i）$c=0, d=0$ のとき
①より $n^2=a^2+b^2+6$　$c=0$ のとき、⑤より $3 \geqq ab$ で、$ab=0,1,2,3$
$ab \neq 0$ のとき　$a \geqq b$ より $(a,b)=(1,1),(2,1),(3,1)$ のいずれかであり、
$(a,b)=(1,1)$ のとき　$n^2=1^2+1^2+6=8$　n が整数にならず不適。
$(a,b)=(2,1)$ のとき　$n^2=2^2+1^2+6=11$　n が整数にならず不適。
$(a,b)=(3,1)$ のとき　$n^2=3^2+1^2+6=16$　$\therefore n=4$　これは $a+b \leqq n$ も満たす。
$ab=0$ のとき　少なくとも $b=0$ であり、
$n^2=a^2+6$　$n^2-a^2=(n+a)(n-a)=6$　$n+a, n-a$ は整数かつ $n+a \geqq n-a$ であるから、
$(n+a, n-a)=(6,1),(3,2)$ のいずれかであるが、
$(n+a, n-a)=(6,1)$ のとき $n=\dfrac{7}{2}, a=\dfrac{5}{2}$　$(n+a, n-a)=(3,2)$ のとき $n=\dfrac{5}{2}, a=\dfrac{1}{2}$
いずれにしても、n, a が整数にならず、不適。

ii）$c=1, d=0$ のとき
①より $n^2=a^2+b^2+7$　$c=1$ のとき、⑤より $3 \geqq ab+a+b$　$(a+1)(b+1) \leqq 4$
ここで $b \geqq c$ より　$b \geqq 1$　$b+1 \geqq 2$ であり、
$a \geqq b$ より　$a+1 \geqq b+1 \geqq 2$ であるから、$(a+1, b+1)=(2,2)$ しかあり得ないので、
$\therefore (a,b)=(1,1)$　$n^2=1^2+1^2+7=9$　$\therefore n=3$　これは $a+b+1 \leqq n$ も満たす。

以上により、$\therefore (n,a,b,c,d)=(4,3,1,0,0),(3,1,1,1,0)$ ……（答）