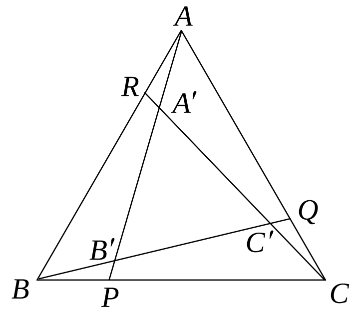
1980年東大理 $\boxed{1}$



(1)

$BB':B'Q=k:1-k\,(0<k<1)$ とおく。このとき、

$\overrightarrow{AB'}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AQ}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k(1-x)\overrightarrow{AC}$ ——①

次に、$BP:PC=x:1-x$ より　$\overrightarrow{AP}=(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB'}=t\overrightarrow{AP}$ と書けるから、$\overrightarrow{AB'}=t(1-x)\overrightarrow{AB}+tx\overrightarrow{AC}$ ——②

①、②より $\begin{cases}1-k=t(1-x)\\ k(1-x)=tx\end{cases}$　$t=\dfrac{1-k}{1-x}=\dfrac{k(1-x)}{x}$　$\begin{array}{l}k(1-x)^2=x-kx\\ k(1-x+x^2)=x\end{array}$　$\therefore k=\dfrac{x}{1-x+x^2}$

余弦定理により

$BQ^2=1+x^2-2\cdot1\cdot x\cdot\cos60°=1-x+x^2$　$\therefore BQ=\sqrt{1-x+x^2}$　$\therefore BB'=kBQ=\dfrac{x}{\sqrt{1-x+x^2}}$　……(答)

また、$t=\dfrac{k(1-x)}{x}=\dfrac{1-x}{1-x+x^2}$ で、$AB'=tAP$ より

$\therefore PB'=AP-AB'=(1-t)AP=\left(1-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}\right)\sqrt{1-x+x^2}=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}$　……(答)

(2)

三角形 $A'B'C'$ の面積が三角形 ABC の面積の $\dfrac{1}{2}$ になるには、$A'B'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、

$A'B'=\sqrt{1-x+x^2}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x+x^2}}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}=\dfrac{1-2x}{\sqrt{1-x+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\dfrac{(1-2x)^2}{1-x+x^2}=\dfrac{1}{2}$

$2(1-4x+4x^2)=1-x+x^2$　$7x^2-7x+1=0$　$x=\dfrac{7\pm\sqrt{21}}{14}$　$x<\dfrac{1}{2}$ より、$\therefore x=\dfrac{7-\sqrt{21}}{14}$　……(答)