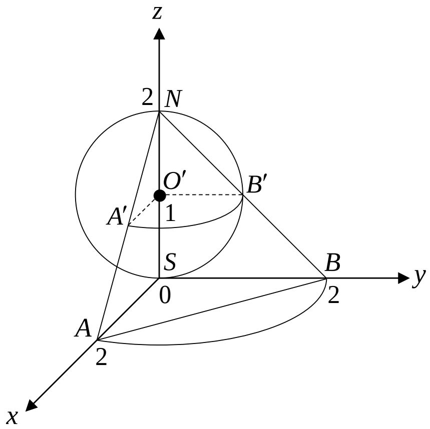
1980 年東大理 $\boxed{2}$



球面 K の中心を $O'(0, 0, 1)$ とし、
$N(0, 0, 2)$、$S(0, 0, 0)$、$A(2, 0, 0)$、$B(0, 2, 0)$ とする。

i）P が $\overset{\frown}{AB}$ 上を動くとき
Q の z 座標は1となり、すなわち K の赤道上を動く。

P が $\overset{\frown}{AB}$ 上を A から B まで動くとき、Q は K の赤道上を $\dfrac{1}{4}$ 周するから、

Q が動く長さは　$1\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

ii）P が AB 上を動くとき
Q は、点 N, A, B を通る平面 α と、K が交差してできる円 C の周上を動く。

α の方程式は　$x+y+z=2$　α と O' の距離は $\dfrac{|0+0+1-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

C の半径は　$\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

C の中心を O'' とし、O'' の座標を求める。α に垂直な方向ベクトルの 1 つは $\vec{k}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ であるから

O' を通り、α に垂直な直線上の点は $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\t+1\end{pmatrix}$ と表せる。これを α の式に代入すると

$t+t+(t+1)=2$　$3t=1$　$\therefore t=\dfrac{1}{3}$　O'' の座標は $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ である。

NA, NB と K の交点を、それぞれ A', B' とすると、$A'(1, 0, 1), B'(0, 1, 1)$ であるから

$\overrightarrow{O''A'}=\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right), \overrightarrow{O''B'}=\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$　$\left|\overrightarrow{O''A'}\right|=\left|\overrightarrow{O''B'}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　$\overrightarrow{O''A'}\cdot\overrightarrow{O''B'}=-\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{9}=-\dfrac{1}{3}$

$\cos\angle A'O''B'=-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{\sqrt{6}}\right)^2=-\dfrac{1}{2}$　$\therefore \angle A'O''B'=\dfrac{2}{3}\pi$

P が AB 上を A から B まで動くとき、Q は C 上を $\dfrac{1}{3}$ 周するから、Q が動く長さは　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\pi$

以上により、Q が描く曲線の長さは　$\therefore \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\right)\pi$　……(答)