1980 年東大理 4

$$x^2+y^2=(\sin t+\cos t)^2+k^2\sin^4 t\cos^4 t=1+2\sin t\cos t+k^2\sin^4 t\cos^4 t$$

$z=\sin t\cos t$ とすると、 $z=\dfrac{1}{2}\sin 2t$ より　$-\dfrac{1}{2}\leqq z\leqq\dfrac{1}{2}$ ――①

①の範囲で、 $f(z)=k^2z^4+2z+1$ の増減を調べる。

$f'(z)=4k^2z^3+2=4k^2\left(z^3+\dfrac{1}{2k^2}\right)$ より、 $f'(z)=0$ の解は　$z=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}<0$

$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}$　$\sqrt[3]{2k^2}>2$　$k>2$ のとき　$f(z)$ 増減は右の通り。

最大値は　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{16}k^2+2$

最小値は

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}\right)=k^2\frac{1}{2k^2\sqrt[3]{2k^2}}-\frac{2}{\sqrt[3]{2k^2}}+1=-\frac{3}{2\sqrt[3]{2k^2}}+1$$

z	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$		↘		↗	

$-\dfrac{1}{2}\geqq-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}$　$\sqrt[3]{2k^2}\leqq 2$　$0<k\leqq 2$ のとき　$f(z)$ は①の範囲で単調増加。

最大値は　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{16}k^2+2$　最小値は　$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{16}k^2$

z	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(z)$		$+$	
$f(z)$		↗	

以上により

最大値は $\dfrac{1}{16}k^2+2$ 、最小値は $0<k\leqq 2$ のとき $\dfrac{1}{16}k^2$ 、 $2<k$ のとき $-\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2k^2}}+1$　……(答)