1980 年東大理 $\boxed{5}$

(1)

$n=0$ のとき $P_1(0)=P_2(0)=P_3(0)=0$ 、 $n=1$ のとき $P_1(1)=P_2(1)=P_3(1)=\frac{1}{3}$ は成立。

$n=k$ のとき $P_1(k)=P_2(k)=P_3(k)$ と仮定すると、

$$\begin{cases} P_1(k+1)=\frac{1}{3}P_0(k)+\frac{1}{3}P_2(k)+\frac{1}{3}P_3(k) \\ P_2(k+1)=\frac{1}{3}P_0(k)+\frac{1}{3}P_1(k)+\frac{1}{3}P_3(k) \\ P_3(k+1)=\frac{1}{3}P_0(k)+\frac{1}{3}P_1(k)+\frac{1}{3}P_2(k) \end{cases}$$

より　$\therefore P_1(k+1)=P_2(k+1)=P_3(k+1)=\frac{1}{3}P_0(k)+\frac{2}{3}P_1(k)$

したがって、 $n=k+1$ でも成立。以上より示された。（証明終）

(2)

$P_0(n+1)=\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_2(n)+\frac{1}{3}P_3(n)=\frac{1}{3}\{1-P_0(n)\}$ より

$P_0(n+1)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left\{P_0(n)-\frac{1}{4}\right\}$　$\therefore P_0(n)-\frac{1}{4}=\left\{P_0(0)-\frac{1}{4}\right\}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore P_0(n)=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ ……(答)

$P_0(n+1)=\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_2(n)+\frac{1}{3}P_3(n)=P_1(n)$ より

$\therefore P_1(n)=P_0(n+1)=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ ……(答)

これらは $n=0$ でも成立する。