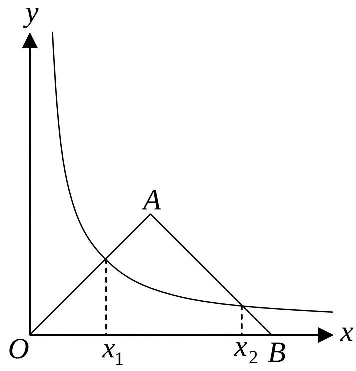
1980年東大理 $\boxed{6}$



$B(t,0)$ とする。 A の y 座標を h とすると、 $\frac{1}{2}th=s \quad \therefore h=\frac{2s}{t}$

これより、 $A\left(\frac{t}{2},\frac{2s}{t}\right)$ と表せる。 $\frac{t}{2}\cdot\frac{2s}{t}=s$ であるから、

i） $s>1$ のとき　点 A は $xy\leqq 1$ で表される領域の外にある。

曲線 $xy=1$ と AO および AB との交点の x 座標を、それぞれ x_1, x_2 とおくと

直線 AO の式は $y=\frac{4s}{t^2}x$ で、 $\frac{1}{x_1}=\frac{4s}{t^2}x_1 \quad {x_1}^2=\frac{t^2}{4s} \quad \therefore x_1=\frac{t}{2\sqrt{s}}<\frac{t}{2}$

直線 AB の式は $y=\frac{4s}{t^2}(t-x)$ で、 $\frac{1}{x_2}=\frac{4s}{t^2}(t-x_2) \quad x_2(t-x_2)=\frac{t^2}{4s} \quad {x_2}^2-tx_2+\frac{t^2}{4s}=0$

$x_2=\frac{1}{2}\left(t\pm\sqrt{t^2-\frac{t^2}{s}}\right)=\frac{t}{2\sqrt{s}}\left(\sqrt{s}\pm\sqrt{s-1}\right) \quad x_2>\frac{t}{2}$ より $\therefore x_2=\frac{t}{2\sqrt{s}}\left(\sqrt{s}+\sqrt{s-1}\right)$

求める面積を $f(s)$ とすると、

$$\therefore f(s)=\frac{1}{2}\cdot x_1\cdot\frac{4s}{t^2}x_1+\frac{1}{2}\cdot(t-x_2)\cdot\frac{4s}{t^2}(t-x_2)+\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{x}dx=\frac{2s}{t^2}\left\{{x_1}^2+(t-x_2)^2\right\}+\left[\log x\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$=\frac{2s}{t^2}\cdot\frac{t^2}{4s}\left\{1+(\sqrt{s}-\sqrt{s-1})^2\right\}+\log\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{2}\left\{1+s+(s-1)-2\sqrt{s(s-1)}\right\}+\log\left(\sqrt{s}+\sqrt{s-1}\right)$$
$$=s-\sqrt{s(s-1)}+\log\left(\sqrt{s}+\sqrt{s-1}\right)$$

ii） $s\leqq 1$ のとき　点 A は $xy\leqq 1$ で表される領域内にある。

このとき、曲線 $xy=1$ と AB が共有点を持つか調べる。

i)の計算より、 ${x_2}^2-tx_2+\frac{t^2}{4s}=0$ の判別式は $D=\frac{t^2(s-1)}{s}$

$s=1$ ならば $D=0$ 、 $\left(x_2-\frac{t}{2}\right)^2=0$ であるから、 $xy=1$ との共有点は点 A のみである。

$s<1$ ならば $D<0$ で、共有点を持たない。いずれにしても、三角形 ABC 全体が $xy\leqq 1$ に含まれる。

以上により、 $\therefore f(s)=\begin{cases} s & (0<s\leqq 1) \\ s-\sqrt{s(s-1)}+\log\left(\sqrt{s}+\sqrt{s-1}\right) & (1<s) \end{cases}$ ……(答)