1981年東大理 $\boxed{1}$

$1 \leqq k \leqq \dfrac{n}{2}$ である。S の n 個の要素から 2 つの要素を選んで部分集合を作る。次に、それらを除いた $n-2$ 個の要素から 2 つの要素を選ぶ。このような操作を k 回行うと、どの 2 つの交わりも空集合である k 個の部分集合ができる。ただし、順番違いが $k!$ 通り考えられる。したがって

$$\therefore f(n,k)=\frac{1}{k!}\cdot {}_nC_2\cdot {}_{n-2}C_2\cdots {}_{n-2(k-1)}C_2=\frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdots\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2}$$

$$=\frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

次に、$f(n,k)=f(n,1)$ のとき　$\dfrac{n!}{2^k k!(n-2k)!}=\dfrac{n!}{2(n-2)!}$　$2^k k!(n-2k)!=2(n-2)!$

$k \geqq 2$ より、$2^{k-1}k!=(n-2)(n-3)\cdots(n-2k+1)$ ——①

$(n-2)-(n-2k+1)+1=2k-2$ より、①の右辺は連続した $2k-2$ 個の自然数の積であり、$(2k-2)!$ で割り切れる。したがって、①の左辺も $(2k-2)!$ で割り切れる。

$k \geqq 2$ より、$(2k-2)-k=k-2 \geqq 0$ で、$2k-2 \geqq k$

$k=2$ のとき

①は $4=(n-2)(n-3)$ となり、$n^2-5n+2=0$　$n=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$　n が自然数にならず、不適。

$k>2$ のとき

$2^{k-1}k!=m(2k-2)!$ と書けて、$2^{k-1}=m(2k-2)(2k-3)\cdots(k+1)$ ——②

ここで、$2k-3 \geqq k+1$、$k \geqq 4$ のとき、$2k-3 \geqq 5$ であり、②の右辺は奇数の素因数を持つ。

ところが、②の左辺は素因数を 2 しか持たないので、不適。

したがって、$2k-2=k+1$、$k=3$ しかあり得ない。$k=3$ のとき、①は

$$24=(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \quad n^4-14n^3+71n^2-154n+96=(n-1)(n-6)(n^2-7n+16)=0$$

$n \geqq 2$ より　$\therefore n=6$

以上により　$\therefore (n,k)=(6,3)$ $\cdots\cdots$(答)

※ $0!=1$ とした。